

NAZIONALE

B. Prov.

BIBLIOTECA

VITT. EM. III

1520

NAPOLI

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

XIV



Palchetto

Num.° d'ordine

5

~~10101~~

~~109~~  
~~7~~  
~~1-2~~

B. Prov

III

1520-21

D. A

D'AI



**OEUVRES  
D'ARCHIMÈDE.**

---

**TOME PREMIER.**

---

IMPRIMERIE DE BACHELIER ,  
Rue du Jardinnet, n° 12.





613221

# OEUVRES D'ARCHIMÈDE,

TRADUITES LITTÉRALEMENT,

AVEC UN COMMENTAIRE,

PAR F. PEYRARD,

Professeur de Mathématiques et d'Astronomie au Lycée Bonaparte;

SUIVIES

D'UN MÉMOIRE DU TRADUCTEUR, SUR UN NOUVEAU MIROIR ARDENT,

Et d'un autre Mémoire de M. DELAMBRE, sur l'Arithmétique des Grecs.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'INSTITUT

ET ADOPTÉ PAR LE GOUVERNEMENT POUR LES BIBLIOTHÈQUES DES LYCÉES.

*Dédié à Sa Majesté l'Empereur et Roi.*

SECONDE ÉDITION.

TOME I<sup>er</sup>.

Édition publiée en MDCCC VIII.



PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

QUAI DES AUGUSTINS, N<sup>o</sup> 55.

D. 1844



*bole*, par exemple, soit bien grec, et qu'il se trouve même dans le titre de l'un des *Traité*s d'Archimède, on ne le rencontre pourtant jamais dans le texte. Par tout on y voit cette courbe désignée par les mots de *section du cône rectangle*. L'ellipse y est nommée *section du cône obliquangle*, et l'hyperbole *section du cône obtusangle*. Le paramètre, nommé  $\epsilon\phi\theta\iota\alpha$  par *Apollonius*, et *latus rectum* par les Modernes, est désigné dans Archimède par l'expression longue et vague de *ligne qui s'étend jusqu'à l'axe*; les mots d'*ordonnée* et d'*abscisse* sont suppléés par de longues périphrases. Quoiqu'Archimède établisse en un endroit la distinction entre l'axe et les diamètres de la parabole, cependant il donne toujours à l'axe le nom de *diamètre*, et celui-ci est désigné par les termes de *ligne parallèle au diamètre*. Enfin, croiroit-on que les Grecs n'ont jamais eu de mot pour exprimer le *rayon d'un cercle*, et qu'ils l'appeloient *ligne qui part du centre*? Toutes ces expressions, qui reviennent à chaque instant, donnent à l'énoncé des propositions et à tous les raisonnemens dont se compose la démonstration, une longueur très-incommode; et je serois peu surpris que le Géomètre qui entend le mieux le grec, préférât cependant la traduction pour suivre facilement une démonstration pénible et obscure, telle qu'il s'en rencontre plus d'une dans Archimède. Chaque membre de phrase est clair et très-intelligible à le considérer seul; mais le tout est si long, qu'on a souvent oublié le commencement, quand on arrive à l'endroit où le sens est complet. Ces inconvéniens se retrouvent presque tous, avec beaucoup d'autres, dans les traductions latines;

mais la majeure partie a disparu tout naturellement dans la traduction de M. Peyrard, qui s'est permis d'écrire, *rayon*, *tangente*, *parabole* et *paramètre*. Cependant il a conservé assez souvent *section du cône rectangle*, et peut-être a-t-il eu tort (\*). Il auroit pu s'autoriser de l'exemple d'Apollonius; mais il a voulu sans doute respecter son original, toutes les fois qu'il a cru le pouvoir sans nuire à la clarté. Il a voulu tenir la promesse qu'il a faite, dans son *Prospectus*, de donner une traduction littérale; et la sienne nous a paru telle en effet.

Archimède étoit fort exact à démontrer toutes les propositions dont il faisoit usage, à moins qu'elles ne fussent déjà démontrées dans ses Traités antérieurs, ou dans ceux d'autres Auteurs alors fort répandus : mais une partie de ces ouvrages est perdue; de là quelques lacunes que M. Peyrard a remplies dans ses notes. Quelquefois aussi il y démontre algébriquement des lemmes qui, traités à la manière des Anciens, sont trop obscurs et trop pénibles. Souvent il a puisé dans les Commentaires d'Eutocius; et il auroit pu lui faire bien d'autres emprunts, s'il n'avoit craint de trop grossir le volume. Quelquefois aussi Eutocius, en suivant de trop près la marche d'Archimède, n'est guère moins obscur que lui; et c'est ce qu'on remarque principalement à la proposition 9 du liv. 2 de l'Equilibre des plans. La démonstration d'Archimède a trois énormes colonnes

---

(\*) M. Delambre a raison; j'ai remplacé cette expression par celle de *parabole*.



*in-folio*, et n'est rien moins que lumineuse. Eutocius commence sa note en disant, que le théorème est fort peu clair, et il promet de l'expliquer de son mieux. Il y emploie quatre colonnes du même format et d'un caractère plus serré, sans réussir davantage; au lieu que quatre lignes d'algèbre suffisent à M. Peyrard pour mettre la vérité du théorème dans le plus grand jour. Il est peu croyable qu'Archimède ait pu arriver par une voie si longue à la proposition qu'il vouloit établir; et il est beaucoup plus probable qu'il en aura reconnu la vérité par quelqu'autre moyen, et que, bien sûr de cette vérité, il aura pris ce long détour pour la démontrer, en ne supposant que des propositions avouées et reçues des Géomètres de son temps.

Telle est l'idée que nous pouvons donner ici du travail de M. Peyrard: sa traduction est fidèle et complète; et quand il n'auroit rien ajouté de lui-même, ce seroit déjà un service important rendu aux Géomètres. On prendra, dans la traduction française, une connoissance du génie et des méthodes d'Archimède, aussi juste et aussi exacte que si on le lisoit dans l'original. Le Traducteur a tenu toutes ses promesses, et rempli toutes les conditions qu'il s'étoit imposées dans son *Prospectus*. On doit donc des éloges à M. Peyrard, et desirer que le succès de cette nouvelle traduction lui inspire le courage d'entreprendre celle d'Apolonius, bien moins difficile, au reste, que l'ouvrage qu'il vient d'achever.

Cette autre entreprise seroit d'autant plus utile, que l'édition d'Oxford, la seule qui soit

**XVj RAPP. SUR LES ŒUV. D'ARCHIM.**

complète , est aujourd'hui d'un prix et d'une rareté qui la tiennent au-dessus des moyens d'un grand nombre de Géomètres.

Fait au Palais des Sciences et Arts, le 22 Septembre 1806.

*Signés, LA GRANGE, DELAMBRE;  
Rapporteurs.*

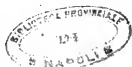
La Classe approuve le Rapport, et en adopte les Conclusions.

*Certifié conforme à l'original, à Paris, le 24 Septembre 1806.*

*Le Secrétaire perpétuel, Signé, DELAMBRE.*

A SA MAJESTÉ  
L'EMPEREUR ET ROI.

SIRE,



JE m'étois imposé la tâche longue et pénible de faire passer dans notre Langue les *Œuvres d'Archimède*, qui n'avoient encore été traduites dans aucune Langue vivante. Ma tâche étant terminée, je ne formois plus qu'un vœu : c'étoit de dédier

vj            ÉPITRE DÉDICATOIRE.

au plus grand de tous les Guerriers la  
Traduction des Ecrits du plus grand des  
Géomètres. VOTRE MAJESTÉ daigne en  
agréer la Dédicace, le plus cher de mes  
vœux est accompli.

Je suis, avec respect,

SIRE,

DE VOTRE MAJESTÉ IMPÉRIALE ET ROYALE,

Le très-humble, très-obéissant  
et très-fidèle Sujet,

F. PEYRARD.

---

---

# *AVERTISSEMENT*

## *DU LIBRAIRE.*

*LA Première Edition des ŒUVRES d'ARCHIMÈDE ayant été épuisée avec rapidité, il est devenu nécessaire de publier cette nouvelle Edition in-8°. Elle a été revue par l'Auteur..*

*Les Personnes qui n'ont pu se procurer la Première Edition, me sauront gré, sans doute, de ne pas les priver d'un Ouvrage aussi important pour les progrès des Sciences Mathématiques.*

On trouve chez le même Libraire, l'Ouvrage suivant, qui a été adopté par le Gouvernement pour les Bibliothèques des Lycées, et pour être donné en prix aux Elèves de ces Etablissemens.

**ANNALES NÉCROLOGIQUES DE LA LÉGION D'HONNEUR**, ou *Notices sur la Vie, les Actions d'éclat, les Services Militaires et Administratifs, les Travaux Scientifiques et Littéraires des Membres de la Légion d'Honneur, décédés depuis l'origine de cette Institution; dédiées à S. M. l'Empereur et Roi, Chef suprême de la Légion d'Honneur*, et rédigées d'après des Mémoires authentiques, par *J. Lavallée*, Chef de Division à la grande Chancellerie de la Légion d'Honneur, Secrétaire perpétuel de la Société Philotechnique de Paris, Membre de l'Académie Celtique et de celle des Enfans d'Apollon, de la Société Royale des Sciences de Gottingue, des Académies de Dijon, etc.

Cet Ouvrage étant par ordre alphabétique, fait Suite aussi au Dictionnaire des Hommes célèbres.

Vol. in-8°. , avec quinze portraits de Légionnaires, gravés en taille-douce, et dont les dessins ont été fournis par les Familles des Légionnaires. Prix, 8 fr. 50 c. broché. En papier vélin, 17 fr.

---

# RAPPORT

*Fait à l'Institut National, Classe des Sciences Physiques et Mathématiques, par MM. Lagrange et Delambre, sur la traduction des ŒUVRES D'ARCHIMÈDE.*

---

LA Classe, en approuvant la traduction d'Euclide, avoit invité l'Auteur (M. Peyrard) à terminer celle des ŒUVRES D'ARCHIMÈDE, qu'il avoit dès-lors entreprise. Ce travail est achevé. Nous l'avons comparé avec le texte original, et ce sont les résultats de cet examen que nous allons soumettre au jugement de la Classe.

Archimède a conservé la réputation de l'un des génies les plus étonnans, et de l'une des têtes les plus fortes qui se soit jamais appliquée aux Mathématiques. Aucun Géomètre ancien ne s'est fait connoître par des Découvertes plus nombreuses et plus importantes ; mais, malgré tant de renommée, il compte aujourd'hui peu de Lecteurs. La principale raison en est, sans doute, l'invention des nouveaux calculs.

Malgré l'avantage des nouvelles méthodes, malgré leur certitude qui n'est plus contestée par les admirateurs même les plus outrés des Anciens, il n'est pas de Géomètre qui ne doive être curieux de voir par quelle adresse et quelle profondeur de méditation, la Géométrie élémentaire a pu

conde. Mais c'est une pure spéculation destinée à montrer comment on pourroit donner une extension indéfinie à l'arithmétique de ce temps, et jamais Archimède n'a songé à rendre son idée utile dans les calculs ordinaires, à changer la multiplication en une addition, et encore moins la division en une soustraction. On ne lui voit réellement exécuter aucun calcul. Il se contente d'indiquer de quel ordre doit être le produit de deux termes quelconques de sa progression géométrique, dont la raison est dix; et pour plus de facilité dans ses opérations, on lui voit constamment ajouter au résultat du calcul, ce qui lui manque pour être un multiple d'une puissance parfaite de dix. Mais en réduisant à sa juste valeur le mérite de son invention, il n'en est pas moins vrai qu'elle est extrêmement curieuse; et c'est à son *Arénaire*, ainsi qu'à sa *Mesure du Cerele*, et au soin qu'a pris son Commentateur Eutocius de développer tous ses calculs, que nous sommes redevables de tout ce que nous savons de plus précis sur l'arithmétique des Grecs; et si vous y ajoutez le fragment d'Apollonius, conservé par Pappus et publié par Wallis, et sur-tout les calculs astronomiques de Théon, dans son Commentaire sur l'*Almageste* de Ptolémée, vous aurez de quoi recomposer un Traité complet d'arithmétique grecque, en y comprenant la formation des puissances et l'extraction de la racine quarrée.

Voilà bien des motifs pour qu'au moins une fois en sa vie tout Géomètre se croie obligé de lire Archimède tout entier. Mais les bonnes éditions sont rares ou incomplètes : le texte grec y



est singulièrement altéré, et les fautes d'impression ne sont pas rares, même dans la belle édition d'Oxford; il est vrai qu'elles sont de nature à être facilement aperçues et corrigées. Le style des Traducteurs, Commendin et Torelli exceptés, est souvent barbare, et quelques-uns ont montré qu'ils entendoient médiocrement le grec et la géométrie.

Le style d'Archimède lui-même est beaucoup meilleur, il est plus doux, plus agréable que celui d'aucun Géomètre grec. L'harmonie naturelle des grands mots qu'il est forcé d'employer, distrair souvent le Lecteur de l'attention qu'il doit au fonds des idées. Malgré le dialecte dorique qui domine plus ou moins dans presque tous ses ouvrages, il est, grammaticalement parlant, toujours clair et facile à comprendre. Archimède suit assez généralement l'ordre naturel, et ne se permet d'inversions que celles qu'il n'a pu éviter, parce qu'elles sont dans le génie de sa langue; mais ce génie n'est pas précisément celui qui convient aux mathématiques. La multitude d'articles dont cette langue est embarrassée, beaucoup plus que la nôtre, la place où se mettent ces articles qui s'entrelacent et se trouvent souvent assez loin des mots auxquels ils appartiennent, toute cette construction nuit essentiellement à la clarté, sur-tout dans les propositions longues et compliquées; et le Traducteur français peut facilement obtenir à cet égard un avantage marqué sur son original.

On s'attendroit à retrouver chez les Géomètres anciens une foule de termes grecs dont nous faisons un usage continuel. Quoique le mot *para-*

---

# PRÉFACE

CONTENANT LA VIE ET L'ANALYSE DES ÉCRITS  
D'ARCHIMÈDE.

ARCHIMÈDE naquit 287 ans avant l'ère vulgaire ; il étoit le parent et l'ami du Roi Hiéron , qui gouverna , avec douceur et sagesse , les Syracusains , pendant l'espace de cinquante ans.

Platon et Aristote florissoient dans le siècle précédent. Euclide n'existoit plus , ou du moins il étoit d'une extrême vieillesse , lorsqu'Archimède parut. La naissance d'Apollonius de Perge n'eut lieu qu'environ quarante ans après.

Archimède avoit pour ami intime Conon , dont parle Virgile dans sa troisième Eglogue (\*). Conon étant mort , Archimède écrivit à Dosithée la lettre suivante , qui est à la tête de son Traité de la Quadrature de la Parabole :

---

(\*) In medio duo signa : Conon , et quis fuit alter ?  
Descripsit radio totum qui gentibus orbem ,  
Tempora quæ messor , quæ curvus arator haberet.

tiens se servirent dans la suite pour répandre et distribuer les eaux du Nil dans les lieux qu'elles ne pouvoient atteindre.

Archimède avoit une ardeur invincible pour l'étude. On raconte de lui que, sans cesse retenu par les charmes de l'étude, il oublioit de boire et de manger. Traîné souvent par force aux bains et aux étuves, il traçoit des figures de Géométrie sur les cendres, et des lignes sur son corps enduit d'essence.

« De quelle ardeur, dit Cicéron, Archimède ne devoit-il pas être enflammé pour l'étude, lui qui, occupé à décrire certaines figures, ne s'aperçut pas même que sa Patrie étoit au pouvoir des Romains (\*) » ?

Le Roi Hiéron avoit fait remettre à un orfèvre une certaine quantité d'or pour en faire une couronne ; mais l'Artiste retint une partie de cet or, et lui substitua un égal poids d'argent. Archi-

---

(\*) Quem enim ardorem studii censeatis fuisse in Archimede, qui dum in pulvere quodam describit attentius, ne patriam quidem captam esse senserit ?  
CIC. *De Finibus*, lib. v.

mède fut consulté sur le moyen de découvrir la quantité d'argent substituée à l'or. Un jour qu'il étoit aux bains, tout-à-coup se présente à son esprit la solution de ce problème. On dit que transporté de joie, il s'élance du bain, et, qu'oubliant qu'il étoit nu, il traverse les rues de Syracuse, en criant : *Je l'ai trouvé, je l'ai trouvé.*

On raconte encore que dans une autre circonstance, il démontra au Roi Hiéron, qu'on pouvoit, avec une force donnée, mouvoir une masse quelque grande qu'elle pût être. Il ajouta même que d'une autre terre il pourroit déranger la nôtre de sa place. Le Roi, étonné, l'invite à faire mouvoir devant lui une grande masse, avec une très-petite force. Il se trouvoit dans le port une galère qui ne pouvoit être tirée à terre qu'à force de peines et de bras ; Archimède y fait placer un grand nombre d'hommes, outre sa charge ordinaire ; ils s'assied ensuite à une distance considérable, et, au moyen d'un moufle, attire à lui avec la main, et sans un grand effort, le vaisseau, qui sem-

bloit voguer naturellement sur la surface de la mer. Le Roi frappé d'étonnement , admire la puissance de l'art ; il presse Archimède de lui construire des machines , à l'aide desquelles il puisse à son gré attaquer ou se défendre.

Hiéron ne se servit point des machines que lui construisit Archimède ; car il dut à la fortune et sur-tout à lui-même de passer sa longue vie dans une paix continue.

Après la mort d'Hiéron , Hiéronyme , son petit-fils , monta sur le trône. Au lieu d'imiter son aïeul , il affecta de marcher sur les traces de Denis le Tyran. Les Syracusains se soulevèrent et le précipitèrent du trône , après un règne de quelques mois. Hipparque , général des Syracusains , favorisa le parti des Carthaginois. Le Sénat romain chargea Marcellus de s'emparer de Syracuse.

« Tout étant prêt , dit Polybe , les Romains étoient sur le point d'attaquer les tours. Mais Archimède avoit de son côté disposé des machines capables de lancer des traits à quelque distance que ce fût. Les

ennemis étoient encore loin de la ville, qu'avec des balistes et des catapultes plus grandes qu'à l'ordinaire et animées d'une très-grande force, il les perçoit de tant de traits, qu'ils ne savoient comment les éviter. Quand les traits passoient au-delà, il avoit de plus petites catapultes proportionnées à la distance; ce qui causoit une si grande confusion parmi les Romains, qu'ils ne pouvoient rien entreprendre. Marcellus, ne sachant quel parti prendre, fut obligé de faire avancer secrètement ses galères à la faveur de la nuit. Mais quand elles furent près de terre et à la portée du trait, Archimède inventa un autre stratagème contre ceux qui combattoient de leurs vaisseaux : il fit percer des trous dans la muraille, à hauteur d'homme et d'une palme d'ouverture en dehors. Il plaça en dedans des arbalétriers et de petits scorpions. Par le moyen de ces ouvertures, il atteignoit la flotte ennemie, et mettoit en défaut toutes ses attaques. De cette manière, soit que les ennemis fussent éloignés, ou qu'ils fussent près de terre,

non-seulement il rendoit tous leurs projets inutiles, mais encore il en tuoit une grande partie. Lorsqu'ils vouloient dresser les sambuques, des machines disposées le long des murs en dedans, s'élevoient sur les forts, et s'avançoient bien loin au-delà. Beaucoup d'entre elles jetoient des pierres qui ne pesoient pas moins de dix talens, et d'autres des masses de plomb d'une égale pesanteur. Quand les sambuques s'approchoient, on tournoit par le moyen d'une corde les becs de ces machines selon le besoin, et de là on faisoit tomber sur les sambuques des pierres qui non-seulement brisoient ces machines, mais encore mettoient les vaisseaux et ceux qui s'y trouvoient dans un extrême péril.

» Il y avoit encore d'autres machines qui dirigeoient des pierres contre les ennemis qui s'avançoient couverts par des claies, et qui se croyoient en sûreté contre les traits lancés des murailles; mais ces pierres tomboient si juste, qu'ils étoient obligés de se retirer de la proue.

» Outre cela, il lançoit une main de

fer attachée à une chaîne. Lorsque cette main avoit saisi la proue d'un vaisseau, celui qui conduisoit le bec de la machine abaissoit vers la terre le bout qui étoit en dedans du mur. Quand il avoit dressé le vaisseau sur la poupe, il tenoit immobile pendant quelque temps le bec de la machine, et lâchoit ensuite la main de fer et la chaîne, par le moyen d'une poulie. De cette manière il y avoit des navires qui tomboient sur le côté, d'autres sur le devant, et la plupart tomboient perpendiculairement sur la proue, et étoient submergés. Marcellus étoit dans un très-grand embarras : tous ses projets étoient renversés par les inventions d'Archimède; il faisoit des pertes considérables, et les assiégés se moquoient de tous ses efforts.

» Appius qui avoit éprouvé sur terre les mêmes difficultés, avoit abandonné son entreprise. Quoique son armée fût loin de la ville, elle étoit accablée des pierres et des traits que lançoient les balistes et les catapultes; tant étoit prodigieuse la quantité des traits qui en partoient, et la roideur avec laquelle ils étoient lancés.



» Lorsque les ennemis s'approchoient de la ville, blessés par les traits qu'on lançoit à travers la muraille, ils faisoient des efforts superflus. Si, couverts de leurs boucliers, ils s'avançoient avec impétuosité, ils étoient assommés par les pierres et par les poutres qu'on leur faisoit tomber sur la tête; sans parler des pertes que leur causoient ces mains de fer dont nous avons fait mention plus haut, et qui, en élevant des hommes avec leurs armes, les brisoient ensuite contre terre.

» Appius se retira dans son camp, et assembla le Conseil des Tribuns. On résolut de tenter toutes sortes de moyens pour surprendre Syracuse, à l'exception d'un siège en forme; et cette résolution fut exécutée. Car pendant huit mois que les Romains restèrent devant la ville, il n'y eut sorte de stratagèmes que l'on n'inventât, ni d'actions de valeur que l'on ne fit, à l'assaut près, que l'on n'osât jamais tenter. Telle étoit la puissance d'un seul homme; tel étoit le pouvoir de son génie. Avec des forces de terre et de mer aussi considérables la ville, à la première at-

taque, tomberoit au pouvoir des Romains, si un seul vieillard n'étoit dans Syracuse. Archimède est dans ses murs, et ils n'osent même pas en approcher ».

Voilà ce que rapporte Polybe : Tite-Live et Plutarque racontent les mêmes choses.

« Lorsque les vaisseaux de Marcellus furent à la portée de l'arc, dit Tzetzes, le vieillard (Archimède) fit approcher un miroir hexagone qu'il avoit fabriqué. Il plaça, à une distance convenable de ce miroir, d'autres miroirs plus petits, qui étoient de la même espèce, et qui se mouvoient à l'aide de leurs charnières et de certaines lames quarrées de métal. Il posa ensuite son miroir au milieu des rayons solaires du midi d'été et d'hiver. Les rayons du soleil étant réfléchis par ce miroir, il s'alluma un horrible incendie dans les vaisseaux, qui furent réduits en cendres à une distance égale à celle de la portée de l'arc. . . . (\*) ».

---

(\*) Voyez mon *Mémoire sur un nouveau Miroir ardent*, tom. II, pag. 500.

Marcellus désespérant de prendre Syracuse, cessa toute attaque de vive force; convertit le siège en blocus, et quelque temps après, profitant d'une fête de Diane, fit enfoncer une des portes de la ville, et surprit les Syracusains au milieu des festins et des plaisirs. Tandis que les vainqueurs répandus dans la ville se livrent à toutes sortes d'excès, Archimède, entièrement occupé de figures qu'il avoit tracées, fut tué par un soldat qui ne le connoissoit point. Marcellus déplora la perte d'Archimède; lui fit donner une sépulture honorable; ordonna de chercher ses parens et les prit sous sa protection.

Archimède avoit prié ses proches et ses amis de mettre sur son tombeau une sphère inscrite dans un cylindre, et de marquer dans l'inscription les rapports de ces deux figures : ses vœux furent accomplis. Cicéron, étant questeur en Sicile, découvrit son tombeau environné de ronces et d'épines.

« Etant questeur en Sicile, dit Cicé-

ron(\*), je mis tous mes soins à découvrir le tombeau d'Archimède. Les Syracusains affirmoient qu'il n'existoît point. Je le trouvai environné de ronces et d'épines. Je fis cette découverte à l'aide d'une inscription qu'on disoit avoir été gravée sur son monument, et qui indiquoit qu'il étoit surmonté d'une sphère et d'un cylindre.

---

(\*) Cujus (Archimedis) ego Quæstor ignoratum ab Syracusanis, cum esse omnino negarent, septum undique, vestitum vepribus et dumetis indagavi sepulcrum: tenebam enim quosdam senariolos, quos in ejus monumento esse inscriptos acceperam: qui declarabant in summo sepulcro sphæram esse positam cum cylindro. Ego autem cum omnia collustrarem oculis (est enim ad portas Agragianas magna frequentia sepulcrorum), animadverti columellam non multum è dumis eminentem: in qua inerat sphæræ figura, et cylindri. Atque ego statim Syracusanis (erant autem principes mecum) dixi, me illud ipsum arbitrari esse quod quærerem. Immissi cum falcibus multi purgarunt, et aperuerunt locum. Quò cum patefactus esset aditus, ad adversam basim accessimus. Apparebat epigramma exesis posterioribus partibus versiculorum, dimidiatis ferè. Ita nobilissima Græciæ civitas, quondam verò etiam doctissima, sui civis unius acutissimi monumentum ignorasset, nisi ab homine Arpinate didicisset. Cic. *Tuscul.* lib. v.

Parcourant des yeux les nombreux tombeaux qui se trouvent vers la porte d'Agrigente , j'aperçus une petite colonne qui s'élevoit au-dessus des buissons , dans laquelle se trouvoit la figure d'une sphère et d'un cylindre. Je m'écriai aussitôt , devant les principaux habitans de Syracuse , qui étoient avec moi : voilà , je pense , ce que je cherchois ! Un grand nombre de personnes furent chargées de couper les buissons et de découvrir le monument. Nous nous approchâmes de la colonne. Nous vîmes l'inscription à moitié rongée par le temps. Ainsi la plus noble et jadis la plus docte des cités de la Grèce , ignoreroit encore où est le tombeau du plus illustre de ses citoyens , si un homme d'Arpinum ne le lui avoit appris ».

Voilà tout ce que nous savons de la vie d'Archimède , d'après les anciens Auteurs. Je vais parler à présent de ses écrits et des machines qu'il a inventées.

Beaucoup de personnes croient que les Ouvrages d'Archimède qui sont parvenus jusqu'à nous , sont altérés et tronqués. Ces

personnes sont dans l'erreur. Les Ouvrages d'Archimède que nous possédons, c'est-à-dire presque tous les Ouvrages qu'il a composés, ne sont ni altérés ni tronqués. Il faut cependant en excepter son *Traité des Corps qui sont portés sur un fluide*, que nous ne possédons plus qu'en latin, et dont une partie des démonstrations de la proposition 8 du premier livre, et de la proposition 2 du second, ont péri en partie par l'injure des temps. Je ne parle pas du livre des *Lemmes* que nous n'avons qu'en arabe.

Les Ouvrages d'Archimède sont : *De la Sphère et du Cylindre, de la Mesure du Cercle, des Conoïdes et des Sphéroïdes, des Hélices, de l'Équilibre des Plans, de la Quadrature de la Parabole, l'Arénaire, des Corps portés sur un fluide, et les Lemmes.*

Je vais mettre sous les yeux du Lecteur les principaux théorèmes qui sont démontrés et les principaux problèmes qui sont résolus dans les *Ouvres* d'Archimède. Je ne parlerai point d'une foule de théo-

rèmes infiniment précieux, qu'il est obligé de démontrer pour arriver à son but.

## DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE.

### LIVRE I.

1. La surface d'un cylindre droit quelconque, la base exceptée, est égale à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cylindre et le diamètre de sa base.

2. La surface d'un cône droit quelconque, la base exceptée, est égale à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cône et le rayon du cercle qui est la base du cône.

3. La surface d'une sphère quelconque est quadruple d'un de ses grands cercles.

4. Une sphère quelconque est quadruple d'un cône qui a une base égale à un grand cercle de cette sphère, et une hauteur égale au rayon de cette même sphère.

5. Ces choses étant démontrées, il est évident que tout cylindre qui a une base égale à un grand cercle d'une sphère,

et une hauteur égale au diamètre de cette sphère, est égal à trois fois la moitié de cette sphère, et que la surface de ce cylindre, les bases étant comprises, est aussi égale à trois fois la moitié de la surface de cette même sphère.

6. La surface d'un segment sphérique quelconque plus petit que la moitié de la sphère, est égale à un cercle qui a pour rayon une droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est à la base du segment.

7. Si le segment est plus grand que la moitié de la sphère, sa surface sera encore égale à un cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment.

8. Un secteur quelconque d'une sphère est égal à un cône qui a une base égale à la surface du segment sphérique qui est dans le secteur, et une hauteur égale au rayon de cette sphère.



## LIVRE II.

1. Un cône ou un cylindre étant donné, trouver une sphère égale à ce cône ou à ce cylindre.

2. Couper une sphère donnée de manière que les segmens aient entre eux une raison donnée.

3. Construire un segment sphérique semblable à un segment sphérique donné, et égal à un autre segment sphérique aussi donné.

4. Etant donnés deux segmens de la même sphère, ou de différentes sphères, trouver un segment sphérique qui soit semblable à l'un des deux, et qui ait une surface égale à celle de l'autre.

5. Retrancher d'une sphère un segment, de manière que la raison de ce segment au cône, qui a la même base et la même hauteur que le segment, soit la même qu'une raison donnée.

## DE LA MESURE DU CERCLE.

1. Un cercle quelconque est égal à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon de ce cercle, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence de ce même cercle.

2. La circonférence d'un cercle quelconque est égale au triple du diamètre, réuni à une certaine portion du diamètre, qui est plus petite que le septième de ce diamètre et plus grande que les dix soixante-onzièmes de ce même diamètre.

## DES CONOÏDES ET DES SPHÉROÏDES (\*).

1. Un segment quelconque d'un conoïde parabolique retranché par un plan perpendiculaire sur l'axe, est égal à trois

---

(\*) Par conoïdes Archimède entend des solides engendrés par la révolution d'une parabole ou d'une hyperbole tournant sur son axe; et par sphéroïde il entend des solides engendrés par la révolution d'une ellipse tournant sur son grand ou sur son petit axe.

fois la moitié du cône qui a la même base et le même axe que ce segment.

2. Si un segment d'un conoïde parabolique est retranché par un plan non perpendiculaire sur l'axe, ce plan sera parallèlement égal à trois fois la moitié du segment du cône qui a la même base et le même axe que ce segment.

3. Si deux segmens d'un conoïde parabolique sont retranchés par deux plans, dont l'un soit perpendiculaire sur l'axe et dont l'autre ne lui soit pas perpendiculaire, et si les axes des segmens sont égaux, ces segmens seront égaux entre eux.

4. Si deux segmens d'un conoïde parabolique sont retranchés par un plan conduit d'une manière quelconque, ces segmens sont entre eux comme les quarrés de leurs axes.

5. Un segment d'un conoïde hyperbolique retranché par un plan perpendiculaire sur l'axe, est à un cône qui a la même base et le même axe que ce segment, comme une droite composée de l'axe du segment et du triple de la droite

ajoutée à l'axe est à une droite composée de l'axe du segment et du double de la droite ajoutée à l'axe (\*).

6. Si un segment d'un conoïde hyperbolique est retranché par un plan non perpendiculaire sur l'axe, le segment du conoïde sera au segment du cône qui a la même base et le même axe que le segment, comme une droite composée de l'axe du segment, et du triple de la droite ajoutée à l'axe est à une droite composée de l'axe du segment, et du double de la droite ajoutée à l'axe.

7. La moitié d'un sphéroïde quelconque coupé par un plan conduit par le centre et perpendiculaire sur l'axe, est double du cône qui a la même base et le même axe que le segment.

8. Si un sphéroïde quelconque est coupé par un plan conduit par le centre et non perpendiculaire sur l'axe, la moi-

---

(\*) L'ajoutée à l'axe est la droite comprise entre le sommet du conoïde et le sommet du cône dont la surface est engendrée par les asymptotes; c'est ce que nous appelons la moitié du premier axe.

tié du sphéroïde sera encore double d'un segment de cône qui aura la même base et le même axe que le segment.

9. Le segment d'un sphéroïde quelconque coupé par un plan perpendiculaire sur l'axe qui ne passe pas par le centre , est au cône qui a la même base et le même axe que ce segment , comme une droite composée de la moitié de l'axe du sphéroïde , et de l'axe du plus grand segment est à l'axe du plus grand segment.

10. Si un sphéroïde est coupé par un plan qui ne passe pas par le centre et qui ne soit pas perpendiculaire sur l'axe , le plus petit segment sera au segment de cône qui a la même base et le même axe que le segment , comme une droite composée de la moitié de la droite qui joint les sommets des segmens qui sont produits par le plan coupant et de l'axe du petit segment est à l'axe du grand segment.

11. Le grand segment d'un sphéroïde quelconque coupé non par son centre par un plan perpendiculaire sur l'axe , est au cône qui a la même base et le même axe

que ce segment, comme une droite composée de la moitié de l'axe du sphéroïde et de l'axe du petit segment est à l'axe du petit segment.

12. Si un sphéroïde est coupé par un plan qui ne passe pas par le centre et qui ne soit pas perpendiculaire sur l'axe, le plus grand segment du sphéroïde sera au segment de cône qui a la même base et le même axe que lui, comme une droite composée de la moitié de la droite qui joint les sommets des segmens qui ont été produits par cette section, et de l'axe du petit segment est à l'axe du petit segment.

## DES HÉLICES.

1. Si une ligne droite, une de ses extrémités restant immobile, tourne dans un plan avec une vitesse uniforme jusqu'à ce qu'elle soit revenue au même endroit d'où elle avoit commencé à se mouvoir, et si un point se meut avec une vitesse uniforme dans la ligne qui tourne, en partant de l'extrémité immobile, ce point décrira une hélice dans un plan; la sur-

face qui est comprise par l'hélice, et par la ligne droite revenue au même endroit d'où elle avoit commencé à se mouvoir, est la troisième partie d'un cercle qui a pour centre le point immobile, et pour rayon la partie de la ligne droite qui a été parcourue par le point dans une seule révolution de la droite.

2. Si une droite touche l'hélice à son extrémité dernière engendrée, et si de l'extrémité immobile de la ligne droite qui a tourné et qui est revenue au même endroit d'où elle étoit partie, on mène sur cette ligne une perpendiculaire qui coupe la tangente; cette perpendiculaire sera égale à la circonférence du cercle.

3. Si la ligne droite qui a tourné et le point qui s'est mu dans cette ligne continuent à se mouvoir en réitérant leurs révolutions, et en revenant au même endroit d'où ils avoient commencé à se mouvoir; la surface comprise par l'hélice de la troisième révolution est double de la surface comprise par l'hélice de la seconde; la surface comprise par l'hélice de la quatrième est triple; la

surface comprise par l'hélice de la cinquième est quadruple ; et enfin les surfaces comprises par les hélices des révolutions suivantes sont égales à la surface comprise par l'hélice de la seconde révolution multipliée par les nombres qui suivent ceux dont nous venons de parler. La surface comprise par l'hélice de la première révolution est la sixième partie de la surface comprise par l'hélice de la seconde.

4. Si l'on prend deux points dans une hélice décrite dans une seule révolution, si de ces points on mène des droites à l'extrémité immobile de la ligne qui a tourné, si l'on décrit deux cercles qui aient pour centre le point immobile et pour rayons les droites menées à l'extrémité immobile de la ligne qui a tourné, et si l'on prolonge la plus petite de ces droites ; la surface comprise tant par la portion de la circonférence du plus grand cercle, qui est sur la même hélice entre ces deux droites, que par l'hélice et par le prolongement de la plus petite droite, est à la surface comprise tant par



la portion de la circonférence du plus petit cercle, que par la même hélice et par la droite qui joint les extrémités, comme le rayon du petit cercle, conjointement avec les deux tiers de l'excès du rayon du plus grand cercle sur le rayon du plus petit est au rayon du plus petit cercle, conjointement avec le tiers de l'excès dont nous venons de parler.

## DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS.

### LIVRE I.

1. Des grandeurs commensurables sont en équilibre, lorsqu'elles sont réciproquement proportionnelles aux longueurs auxquelles ces grandeurs sont suspendues.

2. Des grandeurs incommensurables sont en équilibre, lorsque ces grandeurs sont réciproquement proportionnelles aux longueurs auxquelles ces grandeurs sont suspendues.

3. Si d'une grandeur quelconque, on retranche une certaine grandeur qui n'ait pas le même centre de gravité que la

grandeur entière, pour avoir le centre de gravité de la grandeur restante, il faut prolonger, vers le côté où est le centre de gravité de la grandeur entière, la droite qui joint le centre de gravité de la grandeur totale et de la grandeur retranchée; prendre ensuite sur le prolongement de la droite qui joint les centres de gravité dont nous venons de parler, une droite qui soit à la droite qui joint les centres de gravité comme la pesanteur de la grandeur retranchée est à la pesanteur de la grandeur restante, le centre de gravité de la grandeur restante sera l'extrémité de la droite prise sur le prolongement.

4. Le centre de gravité d'un parallélogramme est le point où les deux diagonales se rencontrent.

5. Le centre de gravité d'un triangle quelconque est le point où se coupent mutuellement des droites menées des angles du triangle aux milieux des côtés.

6. Le centre de gravité d'un trapèze quelconque, ayant deux côtés parallèles, est dans la droite qui joint les milieux

des deux côtés parallèles, partagée de manière que la partie placée vers le point où le plus petit des côtés parallèles est partagé en deux parties égales, soit à l'autre partie comme le double du plus grand des côtés parallèles, conjointement avec le plus petit est au double du plus petit, conjointement avec le plus grand.

## LIVRE II.

1. Le centre de gravité d'un segment compris par une droite et par une parabole, partage le diamètre, de manière que la partie qui est vers le sommet est égale à trois fois la moitié de la partie qui est vers la base.

2. Le centre de gravité d'un segment retranché d'une surface parabolique est dans la ligne droite qui est le diamètre du segment partagé en cinq parties égales; et il est placé dans la partie du milieu, coupée de manière que la portion qui est plus près de la plus petite base du segment, soit à l'autre portion comme un

solide ayant pour base le quarré construit sur la moitié de la grande base du segment, et pour hauteur le double de la plus petite base, conjointement avec la plus grande, est à un solide ayant pour base le quarré construit sur la moitié de la plus petite base du segment et pour hauteur le double de la plus grande base du segment, conjointement avec la plus petite base du segment.

## DE LA QUADRATURE DE LA PARABOLE.

Un segment quelconque compris par une droite et par une parabole, est égal à quatre fois le tiers d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que ce segment.

## L'ARÉNAIRE.

Dans ce livre, adressé à Gélon, qui étoit fils d'Hiéron et qui mourut quelques mois avant son père, Archimède fait voir que le nombre des grains de sable

contenus dans la sphère des étoiles fixes, seroit au-dessous de 1 suivi de 63 zéros, le diamètre des étoiles fixes étant de 10,000,000,000 stades; le stade étant de 10,000 doigts, et une sphère dont le diamètre seroit la quarantième partie d'un doigt, contenant 64,000 grains de sable.

Ce livre est infiniment intéressant. Archimède expose le système du monde imaginé par Aristarque, qui est le même que celui de Copernic. Il donne un moyen fort ingénieux pour prendre le diamètre apparent du soleil. Pour faire ses calculs, il a imaginé un système de numération qui est à peu de chose près le même que le nôtre; il se sert de deux progressions, l'une arithmétique, l'autre géométrique. Le premier terme de la première progression est zéro, et la différence est un; le premier terme de la progression géométrique un et la raison dix. C'est la comparaison de ces deux progressions qui nous ont menés à la découverte des logarithmes.

## DES CORPS PORTÉS SUR UN FLUIDE.

## L I V R E I.

1. Si un corps qui , sous un volume égal , a la même pesanteur qu'un fluide , est abandonné dans ce fluide , il s'y plongera jusqu'à ce qu'il n'en reste rien hors de la surface du fluide ; mais il ne descendra point plus bas.

2. Si un corps plus léger qu'un fluide est abandonné dans ce fluide , une partie de ce corps restera au-dessus de la surface de ce fluide.

3. Si un corps plus léger qu'un fluide est abandonné dans ce fluide , il s'y enfoncera jusqu'à ce qu'un volume de liquide égal au volume de la partie du corps qui est enfoncé ait la même pesanteur que le corps entier.

4. Si un corps plus léger qu'un fluide est enfoncé dans ce fluide , ce corps remontera avec une force d'autant plus grande , qu'un volume égal du fluide sera plus pesant que ce corps.

5. Si un corps plus pesant qu'un fluide

est abandonné dans ce fluide, il sera porté en bas jusqu'à ce qu'il soit au fond; et ce corps sera d'autant plus léger dans ce fluide, que la pesanteur d'une partie du fluide, ayant le même volume que ce corps, sera plus grande.

6. Si une grandeur solide qui est plus légère qu'un fluide, et qui a la figure d'un segment sphérique, est abandonnée dans un fluide, de manière que la base du segment ne touche point le fluide, le segment sphérique se placera de manière que l'axe du segment ait une position verticale. Si l'on incline le segment de manière que la base du segment touche le fluide, il ne restera point incliné, s'il est abandonné à lui-même, et son axe reprendra une position verticale.

7. Si un segment sphérique plus léger qu'un fluide est abandonné dans ce fluide, de manière que la base entière soit dans le fluide, il se placera de manière que l'axe du segment ait une position verticale.

## L I V R E I I.

Archimède détermine dans ce livre les différentes positions que doit prendre un conoïde plongé dans un fluide suivant les différens rapports de l'axe au paramètre, et suivant les différens rapports des pesanteurs spécifiques du conoïde et du fluide.

## L E M M E S.

Ce livre renferme plusieurs théorèmes et plusieurs problèmes très-curieux, et utiles à l'analyse géométrique.

---

Tels sont les théorèmes qu'Archimède a démontrés, et les problèmes qu'il a résolus. Aucun de ces théorèmes n'avoit été démontré, aucun de ces problèmes n'avoit été résolu avant lui. Bien différent en cela d'Euclide et d'Apollonius, qui n'ont guère fait que rassembler en corps de doctrine des matériaux épars;



mais qui l'ont fait d'une manière admirable.

Archimède, pour démontrer ces théorèmes et pour résoudre ces problèmes, n'a employé que la Géométrie élémentaire, et les trois principes suivans :

1. Deux lignes qui sont dans un plan, et qui ont les mêmes extrémités, sont inégales, lorsqu'elles sont l'une et l'autre concaves du même côté, et que l'une est comprise toute entière par l'autre et par la droite qui a les mêmes extrémités que cette autre, ou bien lorsque l'une n'est comprise qu'en partie et que le reste est commun : la ligne comprise est la plus courte.

2. Pareillement lorsque des surfaces ont les mêmes limites dans un plan, la surface plane est la plus petite.

3. Deux surfaces, qui ont les mêmes limites dans un plan, sont inégales, lorsqu'elles sont l'une et l'autre concaves du même côté, et que l'une est comprise toute entière par l'autre et par le plan qui a les mêmes limites que cette autre; ou bien lorsque l'une n'est comprise qu'en

partie et que le reste est commun : la surface comprise est la plus petite.

C'est à l'aide de ces trois principes, dont personne n'avoit encore fait usage, qu'Archimède fit faire à la Géométrie des progrès dont toute l'antiquité fut étonnée, et qui excitent encore aujourd'hui toute notre admiration. Sans ces trois principes, il lui eût été impossible de faire aucune de ses sublimes découvertes, à moins qu'il n'eût fait usage de la considération de l'infini ; c'est - à - dire, à moins qu'il n'eût regardé une courbe comme étant un assemblage d'une infinité de lignes droites, et un solide de révolution comme étant un polyèdre terminé par une infinité de surfaces planes, ou comme étant un assemblage d'une infinité de troncs de cône. Mais les Anciens étoient loin d'admettre de semblables suppositions, et aujourd'hui même on commence à ne vouloir plus les admettre, du moins dans les élémens de Mathématiques.

Archimède n'a point cherché à démontrer les trois principes dont il a fait

usage, parce qu'il est impossible de les démontrer, quand on ne veut pas faire usage de la considération de l'infini. Cependant Eutocius et dans la suite plusieurs autres Géomètres l'ont tenté, mais en vain. Pour démontrer, par exemple, que la somme de deux tangentes est plus petite que l'arc de cercle qu'elles embrassent, ces Géomètres font le raisonnement suivant : Partageons l'arc en deux parties égales, et par le point de division menons une tangente; partageons les nouveaux arcs chacun en deux parties égales, et par les points de division menons de nouvelles tangentes, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'arc soit divisé en une infinité de parties égales. La somme des deux tangentes est plus grande que le contour de la portion du polygone régulier premièrement circonscrit; le contour de la portion de polygone régulier premièrement circonscrit est plus grand que le contour de la portion de polygone secondement circonscrit; et enfin le contour de la portion du polygone régulier qui a été circonscrit l'avant-dernier, est plus

grand que le contour de la portion du polygone régulier circonscrit en dernier lieu ; donc la somme des deux premières tangentes est plus grande que le contour de la portion de polygone régulier circonscrit en dernier lieu. Mais le contour de la portion du polygone régulier circonscrit en dernier lieu , est égal à l'arc entier , parce que la portion d'un polygone régulier d'une infinité de côtés , est égale à l'arc auquel il est circonscrit. Donc la somme des deux premières tangentes est plus grande que l'arc entier.

Pour que cette conclusion fût légitime, il faudroit qu'ils démontrassent encore que la somme de deux tangentes menées en dernier lieu est plus grande que l'arc qu'elles embrassent ; c'est-à-dire qu'ils n'ont encore rien démontré pour ceux qui bannissent de la Géométrie l'usage de la considération de l'infini.

Plusieurs Géomètres pensent que la partie des élémens d'Euclide qui regarde les corps ronds est incomplète : c'est une erreur. Tout ce qu'on regrette de ne pas trouver dans Euclide , relativement à ces

corps, ne peut se démontrer qu'à l'aide des trois principes posés par Archimède.

En faisant usage de la considération de l'infini, et à l'aide des nouveaux calculs, on démontreroit beaucoup plus facilement les sublimes découvertes d'Archimède.

Pour démontrer, par exemple, qu'un cercle est égal à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence, Archimède est forcé de faire usage d'une démonstration indirecte. Il démontre qu'il est impossible que le cercle soit plus grand que ce triangle; il démontre ensuite qu'il est impossible qu'il soit plus petit, et il conclut que le cercle est égal à ce triangle. La démonstration d'Archimède est sans réplique, mais elle est indirecte, et cela ne pouvoit être autrement.

En faisant usage de la considération de l'infini, on se contente de dire: Circonscrivons au cercle un polygone régulier d'une infinité de côtés; ce polygone sera égal à un triangle rectangle, dont un

des côtés de l'angle droit sera égal au rayon, et dont l'autre côté de l'angle droit sera égal au contour de ce polygone. Mais un polygone régulier d'une infinité de côtés circonscrit à un cercle est égal à ce cercle; donc le cercle est égal au triangle. Cette démonstration est simple et facile; mais est-elle sans réplique? mais satisfait-elle l'esprit? Non, certes. Cette seconde manière de raisonner est fondée sur ce principe: deux quantités qui ne diffèrent qu'infiniment peu l'une de l'autre sont égales entr'elles. L'esprit repousse ce principe; il lui est impossible de reconnaître que deux choses soient égales, quand l'une est plus grande que l'autre. Il sent qu'un cercle ne sauroit être égal à un polygone qui lui est circonscrit.

Sans doute les démonstrations d'Archimède sont plus longues, sont moins faciles qu'elles ne l'auroient été s'il avoit fait usage de la considération de l'infini et s'il avoit employé les nouveaux calculs; mais aussi elles sont sans réplique; elles satisfont pleinement l'esprit. Aristote dit que la tâche du Géomètre est de

démontrer sans réplique : Archimède a rempli sa tâche aussi bien qu'Euclide.

Ceux qui desirent faire des progrès véritablement solides dans les sciences mathématiques ; ceux qui veulent que leur esprit soit doué d'une grande force et d'une grande exactitude, qu'il ait la capacité d'appercevoir à-la-fois clairement et distinctement un grand nombre d'objets et les rapports qu'ils ont entr'eux ; ceux-là doivent lire et méditer Archimède. Archimède est l'Homère des Géomètres.

On lui a reproché de faire souvent usage de démonstrations indirectes. Archimède ne les emploie que lorsqu'il y est forcé ; et il y est forcé dans tous les théorèmes , qui ne pourroient se démontrer directement qu'en faisant usage de la considération de l'infini.

Archimède n'est véritablement difficile que pour ceux à qui les méthodes des Anciens ne sont point familières ; il est clair et facile à suivre pour ceux qui les ont étudiées. J'avoue cependant qu'il y a quelques-unes de ses démonstrations, et sur-tout la démonstration de la propo-

sition 9 du 2<sup>e</sup> livre de l'Equilibre des Plans, qu'on ne peut suivre qu'avec la plus grande contention d'esprit. Il est aussi quelquefois obscur, parce que souvent il franchit des idées intermédiaires. Au reste, voici comment Plutarque s'explique sur cette prétendue obscurité que les Modernes lui reprochent.

« On ne sauroit trouver dans toute la Géométrie de théorèmes plus difficiles et plus profonds que ceux d'Archimède, et cependant ils sont démontrés de la manière la plus simple et la plus claire. Les uns attribuent cette clarté à un esprit lumineux ; d'autres l'attribuent à un travail opiniâtre, qui donne un air aisé aux choses les plus difficiles. Il seroit impossible de trouver, selon moi, la démonstration d'un théorème d'Archimède ; mais lorsqu'on l'a lue, on croit qu'on l'auroit trouvée sans peine, tant est facile et court le chemin qui conduit à ce qu'il veut démontrer ». *Plutarque, Vie de Marcellus.*

Galilée, qui étoit pénétré d'admiration pour les Écrits d'Archimède, enchérit encore sur les expressions de Plutarque.



Quoique j'aie dit plus haut que les Ouvrages d'Archimède n'étoient difficiles que pour ceux à qui les méthodes des Anciens n'étoient pas familières, je ne partage point cependant l'opinion de Plutarque et de Galilée. Je me garderai bien de dire, par exemple, que les démonstrations d'Archimède sont aussi faciles que celles d'Euclide et d'Apollonius.

Voilà ce que j'avois à dire sur les Ecrits d'Archimède, dont je publie la Traduction accompagnée d'un Commentaire. Ces Ecrits n'avoient encore été traduits dans aucune langue vivante. J'ai fait tous mes efforts pour que ma Traduction fût fidèle, et même mot à mot, quand le génie de notre langue me l'a permis. Dans mon Commentaire, je cherche à éclaircir les endroits difficiles; je supplée les idées intermédiaires que j'ai crues nécessaires pour rendre le sens plus clair, et je démontre plusieurs théorèmes sur lesquels Archimède s'appuie et dont les démonstrations n'existent plus, parce que les Ouvrages où elles se trouvoient ne sont point parvenus jusqu'à nous.

Lorsque mon travail fut terminé, je le livrai à l'examen des Commissaires de l'Institut, MM. Lagrange et Delambre. M. Delambre eut la complaisance de comparer mon Manuscrit avec le Texte grec, et de faire des notes marginales. La Classe des Sciences physiques et mathématiques ayant approuvé mon Ouvrage, je le revis avec le plus grand soin, avant de le livrer à l'impression. M. Delambre a vu toutes les épreuves, il les a comparées scrupuleusement avec le Texte grec, et il m'a fait part de ses observations.

Ma Traduction sort des presses de M. Crapelet. Les Figures devoient être placées à la fin de l'Ouvrage; M. Buisson, Libraire-Editeur, a bien voulu qu'elles fussent mises dans le Texte, et répétées autant de fois que le demande la démonstration; il a consenti volontiers à se charger encore des frais énormes occasionnés par ce changement. Ces Figures ont été calculées avec toute la rigueur possible.

Il me reste encore à parler des machines inventées par Archimède.

Les Anciens lui attribuoient quarante inventions mécaniques ; mais on n'en trouve plus que quelques-unes indiquées obscurément par les auteurs. La plupart de ces inventions nous sont inconnues, parce qu'il dédaigna d'en donner la description. Archimède, dit Plutarque dans la vie de Marcellus, avoit un esprit si profond, un génie si élevé ; il possédoit de si grandes connoissances dans la théorie, qu'il ne voulut jamais rien laisser par écrit sur ses inventions mécaniques, qui lui avoient acquis tant de gloire, et qui lui avoient fait attribuer, non une science humaine, mais une intelligence divine.

Des quarante inventions d'Archimède, on ne cite plus aujourd'hui que son Miroir ardent ; la vis qui porte son nom ; sa sphère ; son invention appelée *loculus*. La vis sans fin et la multiplication des poulies passent aussi pour des inventions d'Archimède.

Quant à son Miroir ardent, voyez ce que je dis dans mon Mémoire. Je ne ferai point la description de sa vis inclinée ; elle est connue de tout le monde. Son

mécanisme consiste en ce que la pesanteur, qui fait naturellement descendre un corps, est employée seule dans cette machine pour le faire monter, l'eau ne montant à l'aide de la vis que parce qu'elle descend à chaque instant par son propre poids dans cette vis. Ce qui a fait dire à Galilée: *La quale inventione non solo è maravigliosa, ma è miracolosa.*

Qu'on se garde bien de croire que la vis d'Archimède n'est qu'une invention curieuse : cette invention est au contraire capable de produire les plus grands effets. Près de Furnes, il y avoit un étang de près de deux lieues quarrées, dont le fond, dans une grande partie, étoit à six pieds et demi au-dessous du niveau de la basse mer. Des sommes immenses avoient été employées, mais inutilement, pour le dessécher. Des terres couvertes de riches moissons et des habitations nombreuses ont remplacé cet étang. Une vis d'Archimède et deux moulins à palette, mus par le vent, ont opéré toutes ces merveilles. Voyez les deux lettres que M. Alphonse Leroy fils m'a fait l'honneur

de m'écrire , et qui se trouvoient dans le *Moniteur* du 22 octobre 1806 et du 12 novembre même année.

La sphère d'Archimède , qui représentoit les mouvemens des astres étoit fameuse chez les Anciens.

*Cum Archimedes lunæ , solis , quinque errantium motus in sphæra illigavit , efficit idem quod ille , qui in timæo mundum ædificavit Platonis Deus , ut tarditate et celeritate dissimillimos motus una regeret conversio. Cic. Tusc. quæst. lib. 1.*

*An Archimedes Siculus concavo ære similitudinem mundi ac figuram potuit machinari , in quo ita solem ac lunam composuit , ut inæquales motus ac cælestibus similes conversionibus singulis quasi diebus efficerent : et non modo accessus solis et recessus , vel incrementa diminutionesque lunæ , verum etiam stellarum vel inerrantium , vel vagarum dispares cursus orbis ille dum vertitur , exhiberet ? Lactantius. Divin. inst. lib. 2, cap. 5.*

Sans doute qu'Archimède faisoit plus

de cas de sa sphère que de ses autres inventions, puisque c'est la seule dont il avoit laissé une description qui malheureusement ne nous est pas parvenue.

Il seroit difficile de se faire une idée de l'invention appelée *loculus*. Cette invent on semble n'être d'aucune importance ; sans doute on a eu tort de l'attribuer à Archimède. Au reste, voici la description que nous en donne Fortunatianus.

*Nam si loculus ille Archimedeus quatuordecim eboreas lamellas, quarum anguli varii sunt, in quadratam formam inclusas habens, componentibus nobis aliter atque aliter, modò galeam, modò sicam, aliàs navem, aliàs columnam figurat, et innumerabiles efficit species, solebatque nobis pueris hic loculus ad confirmandam memoriam, plurimum prodesse, quantò majorem potest nobis afferre voluptatem ; quantoque pleniorrem utilitatem, etc.* Gramm. vet. p. 2684.

Avant de finir, je dois parler des Traducteurs et Commentateurs d'Archimède.

Nicolas Tartalea traduisit du grec en

latin, et publiâ à Venise, en 1543, les ouvrages suivans d'Archimède :

1°. *De Centris gravium valde planis æque repentibus.*

2°. *Quadratura Parabolæ.*

3°. *De insidentibus aquæ, liber primus.*

En 1555, les deux livres *De insidentibus aquæ* parurent à Venise. M. Montucla est dans l'erreur lorsqu'il dit dans son Histoire des Mathématiques, que ces deux livres d'Archimède ont été traduits d'après un manuscrit arabe. Tartalea les a traduits d'après un manuscrit grec, comme il le déclare dans sa préface (1). Peut-être le manuscrit grec existe-t-il encore enfoui dans quelque bibliothèque. J'invite tous les bibliothécaires de l'Europe à s'assurer s'ils ne posséderoient pas ce précieux manuscrit.

---

(1) Cum sorte quadam ad manus meas pervenissent fracti, et qui vix legi poterant quidam libri. manu græcâ scripti illius celeberrimi philosophi Archimedis, omnem operam, omne studium, et curam adhibui ut in nostram linguam quæ partes eorum legi poterant, converterentur, etc.

En 1545 parut à Bâle une édition des Œuvres d'Archimède, avec la traduction latine de Jean de Cremone, et revue par Jean Regiomontan. Cette édition ne renferme ni les deux livres *De insidentibus in fluido*, ni les Lemmes. On a joint à cette édition le Commentaire d'Eutocius, grec et latin.

En 1558, Fred. Commandin publia à Venise, avec des Commentaires justement estimés, une excellente Traduction des livres suivans d'Archimède.

1°. *Circuli dimensio.*

2°. *De Lineis spiralibus.*

3°. *Quadratura Paraboles.*

4°. *De Conoidibus et Sphæroidibus.*

5°. *De numero Arenæ.*

En 1565, Fred. Commandin publia à Boulogne les deux livres intitulés : *De iis quæ vehuntur in aquâ*, revus, corrigés, et accompagnés d'un excellent Commentaire.

En 1615 parut l'ouvrage de Revault intitulé : *Archimedis opera quæ extant novis demonstrationibus commentariisque illustrata*. Les définitions, les énon-



cés des propositions, l'Arénaire et les épîtres, sont les seules choses d'Archimède que renferme cette édition : le reste est de Revault. Son Ouvrage lui valut le surnom d'*Infelix Commentator*.

En 1657, Greaves et Foster publièrent une Traduction latine des Lemmes. Ils traduisirent ce livre d'après l'arabe.

En 1661, Borelli publia une traduction latine du même Ouvrage, avec un Commentaire.

En 1675 parut l'Archimède abrégé de Barrow.

En 1681 parut l'Archimède de Fr. Maurolicus. Cet Ouvrage n'est qu'une paraphrase d'Archimède, mais une paraphrase très-estimée. Cet Ouvrage avoit paru en 1570. Mais toute l'édition périt par un naufrage, excepté un ou deux exemplaires.

En 1699, Wallis donna une Traduction latine de la Mesure du Cercle et de l'Arénaire.

Enfin, en 1792 parut à Oxford l'Archimède grec et latin de Torelli. La version latine est littérale et élégante tout à-la-

fois. Les variantes qui sont au bas des pages et à la fin du volume, sont infiniment précieuses.

On desireroit que le format ne fût point un grand in-folio pour la commodité du Lecteur. Les figures, très-bien gravées, sont dans le texte, mais elles ne sont point répétées lorsque l'on tourne le feuillet, ce qui en rend la lecture fatigante, et fait perdre le fil de la démonstration.

---

LORSQUE la Classe des Sciences physiques et mathématiques approuva ma Traduction de la Géométrie d'Euclide, plusieurs Membres témoignèrent leurs regrets de ce que je ne publiois point la Traduction complète de ses Œuvres; et lorsque cette même Classe approuva ma Traduction d'Archimède, elle m'invita à donner celle d'Apollonius. Le double vœu de la Classe sera rempli.

J'ai mis la dernière main à ma Traduction des Œuvres d'Euclide. Elle paroîtra avant la fin de l'année 1808. Cette Traduction renfermera deux volumes in-4°.; elle sera imprimée à l'instar de celle d'Archimède. On souscrit chez l'Auteur, au Lycée Bonaparte; le prix est de 60 fr. pap. ordinaire, et de 120 fr. pap. vélin.

L'Auteur s'occupe actuellement de sa Traduction d'Apollonius de Perge: de cette manière le Public jouira enfin des Traductions des trois plus grands Géomètres de l'antiquité.

---

## AVIS AU LECTEUR.

Les dénominations suivantes sont fréquemment employées par Archimède :

Soit la proportion géométrique  $a : b :: c : d$ ,  
on aura :

Par permutation  $a : c :: b : d$ .

Par inversion...  $b : a :: d : c$ , ou  $d : c :: b : a$ .

Par addition ...  $a + b : b :: c + d : d$ .

Par soustraction  $a - b : b :: c - d : d$ .

Par conversion.  $a : a - b :: c : c - d$ .

Soient les deux proportions géométriques :

$$a : b :: c : d.$$

$$b : f :: d : g.$$

On a par raison d'égalité :

$$a : f :: c : g.$$

Soient les deux proportions géométriques :

$$a : b :: c : d.$$

$$b : f :: g : c.$$

On aura par raison d'égalité dans la proportion troublée :

$$a : f :: g : d.$$

Soient les deux raisons géométriques inégales :

$$a : b > c : d, \text{ on a :}$$

Par permutation  $a : c > b : d$ .

Par inversion...  $b : a < c : d$ .

Par addition ...  $a + b : b > c + d : d$ .

Par soustraction  $a - b : b > c - d : d$ .

Par conversion.  $a : a - b < c : c - d$ .

Il en seroit de même si l'on avoit :

$$a : b < c : d.$$

Les lettres grecques ayant été employées dans les figures, je les place ici avec leurs noms et leurs valeurs, en faveur de ceux qui ne savent pas cette langue.

LETTERES GRECQUES.	LEURS NOMS.	LEURS VALEURS.
A α	alpha	A.
B β	bêta	B.
Γ γ	gamma	G.
Δ δ	delta	D.
E ε	epsilon	E <i>bref.</i>
Z ζ	zêta	Z.
H η	êta	E <i>long.</i>
Θ θ	thêta	TH.
I ι	iôta	I.
K κ	cappa	K.
Λ λ	lambda	L.
M μ	mu	M.
N ν	nu	N.
Ξ ξ	xi	X.
O ο	omicron	O <i>bref.</i>
Π π	pi	P.
Ρ ρ	rho	R.
Σ σ	sigma	S.
Τ τ	tau	T.
Υ υ	upsilon	U.
Φ φ	phi	PH.
Χ χ	chi	CH.
Ψ ψ	psi	PS.
Ω ω	oméga	O <i>long.</i>
Σ	ΣΤ	ST.
Υ	ΤΙ	UI.

---

# OEUVRES D'ARCHIMÈDE.

---

DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE.

LIVRE PREMIER.

ARCHIMÈDE A DOSITHÉE, SALUT.

JE t'avois déjà envoyé, avec leurs démonstrations, les choses que mes réflexions m'avoient fait découvrir; et parmi ces choses étoit le théorème suivant:

Tout segment compris entre une droite et la section du cône rectangle, est égal à quatre fois le tiers d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment ( $\alpha$ ).

J'ai terminé aujourd'hui les démonstrations de plusieurs théorèmes qui se sont

présentés ; et parmi ces théorèmes , on distingue ceux qui suivent :

La surface de la sphère est quadruple d'un de ses grands cercles.

La surface d'un segment sphérique est égale à un cercle ayant un rayon égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment.

Un cylindre qui a une base égale à un grand cercle de la sphère , et une hauteur égale au diamètre de cette même sphère , est égal à trois fois la moitié de la sphère.

La surface du cylindre est aussi égale à trois fois la moitié de la surface de la sphère.

Quoique ces propriétés existassent essentiellement dans les figures dont nous venons de parler , elles n'avoient point été remarquées par ceux qui ont cultivé la géométrie avant nous ; cependant il sera facile de connoître la vérité de nos théorèmes , à ceux qui liront attentivement les démonstrations que nous en avons données. Il en a été de même de plusieurs choses qu'Eudoxe a considérées dans les solides , et qui ont été admises , comme les théorèmes suivans :

Une pyramide est le tiers d'un prisme qui a la même base et la même hauteur que la pyramide.

Un cône est le tiers d'un cylindre qui a la même base et la même hauteur que le cône.

Ces propriétés existoient essentiellement dans ces figures, et quoiqu'avant Eudoxe, il eût paru plusieurs géomètres qui n'étoient point à mépriser, cependant ces propriétés leur étoient inconnues, et ne furent découvertes par aucun d'eux.

Au reste, il sera permis, à ceux qui le pourront, d'examiner ce que je viens de dire. Il eût été à désirer que mes découvertes eussent été publiées du vivant de Conon; car je pense qu'il étoit très-capable d'en prendre connoissance et d'en porter un juste jugement. Quoi qu'il en soit, ayant pensé qu'il étoit bon de les faire connoître à ceux qui cultivent les mathématiques, je te les envoie appuyées de leurs démonstrations: les personnes versées dans cette science pourront les examiner à loisir. Porte-toi bien.

On expose d'abord les propositions qui sont nécessaires pour démontrer les théorèmes dont on vient de parler.

## AXIOMES ET DÉFINITIONS.

1. IL peut y avoir dans un plan , certaines lignes courbes terminées qui soient toutes du même côté des droites qui joignent leurs extrémités , ou qui du moins n'aient aucune de leurs parties de l'autre côté de ces mêmes droites ( $\alpha$ ).

2. Une ligne concave du même côté est celle dans laquelle , ayant pris deux points quelconques , les droites qui joignent ces points tombent tout entières du même côté de la ligne concave , ou bien quelques-unes tombent du même côté de la ligne concave , et quelques autres sur cette ligne , tandis qu'aucune de ces droites ne tombe de différens côtés ( $\beta$ ).

3. Il peut y avoir également des surfaces terminées qui , ayant leurs extrémités dans un plan sans être dans ce plan , sont toutes placées du même côté du plan dans lequel elles ont leurs extrémités , ou qui du moins n'ont aucune de leurs parties de l'autre côté de ce même plan.

4. Une surface concave du même côté est



celle dans laquelle, ayant pris deux points quelconques, les droites qui joignent ces points tombent du même côté de la surface concave, ou bien quelques-unes de ces droites tombent du même côté de la surface concave, et quelques autres dans cette surface, tandis qu'aucune de ces droites ne tombe de différens côtés.

5. J'appelle secteur solide une figure terminée par la surface d'un cône qui coupe la sphère et qui a son sommet au centre, et par la surface de la sphère qui est comprise dans le cône.

6. J'appelle rhombe solide, une figure solide composée de deux cônes qui ont la même base, et dont les sommets sont de différens côtés du plan dans lequel se trouve la base, de manière que les axes ne forment qu'une seule et même droite.

Je prends pour principes les propositions suivantes.

## PRINCIPES.

1. La ligne droite est la plus courte de toutes celles qui ont les mêmes extrémités ( $\alpha$ ).

2. Deux lignes qui sont dans un plan et qui ont les mêmes extrémités sont inégales, lorsqu'elles sont l'une et l'autre concaves du même côté et que l'une est comprise toute entière par l'autre, et par la droite qui a les mêmes extrémités que cette autre, ou bien lorsque l'une n'est comprise qu'en partie et que le reste est commun; la ligne comprise est la plus courte (6).

3. Pareillement lorsque des surfaces ont les mêmes limites dans un plan, la surface plane est la plus petite.

4. Deux surfaces qui ont les mêmes limites dans un plan sont inégales, lorsqu'elles sont l'une et l'autre concaves du même côté, et que l'une est comprise toute entière par l'autre et par le plan qui a les mêmes limites que cette autre; ou bien lorsque l'une n'est comprise qu'en partie, et que le reste est commun; la surface comprise est la plus petite.

5. Étant données deux lignes inégales, ou deux surfaces inégales, ou bien deux solides inégaux, si l'excès de l'une de ces quantités sur l'autre est ajouté à lui-même un certain nombre de fois, cet excès ainsi ajouté à lui-

même pourra surpasser l'une ou l'autre des quantités que l'on compare entre elles (γ).

Ces choses étant supposées, je procède ainsi qu'il suit.

### PROPOSITION I.

Si un polygone est inscrit dans un cercle, il est évident que le contour du polygone inscrit est plus petit que la circonférence de ce cercle.

Car chaque côté du polygone est plus petit que l'arc de la circonférence qu'il soutend (*Princ. 1*).

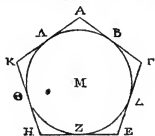
### PROPOSITION II.

Si un polygone est circonscrit à un cercle, le contour du polygone circonscrit est plus grand que la circonférence de ce cercle.

Qu'un polygone soit circonscrit à un cercle : je dis que le contour de ce polygone est plus grand que la circonférence de ce cercle.

Car la somme des droites  $BA, AA$  est plus grande que l'arc  $BA$ ; parce que ces droites

comprennent un arc qui a les mêmes extrémités que ces droites (*Princ.* 2). Semblablement la somme des droites  $\Delta\Gamma$ ,  $\Gamma B$  est



plus grande que l'arc  $\Delta B$ ; la somme des droites  $\Delta K$ ,  $K\Theta$  plus grande que l'arc  $\Delta\Theta$ ; la somme des droites  $ZH$ ,  $H\Theta$  plus grande que l'arc  $Z\Theta$ , et enfin la somme des droites  $\Delta E$ ,  $EZ$  plus grande que l'arc  $\Delta Z$ . Donc le contour entier du polygone est plus grand que la circonférence.

### PROPOSITION III.

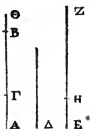
Deux quantités inégales étant données, il est possible de trouver deux droites inégales dont la raison de la plus grande à la plus petite soit moindre que la raison de la plus grande quantité à la plus petite.

Soient deux quantités inégales  $AB$ ,  $\Delta$ ; que

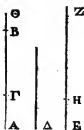
AB soit la plus grande: je dis qu'il est possible de trouver deux droites inégales qui remplissent les conditions de ce qui est proposé.

Que la droite BR soit égale à la droite  $\Delta$ ; et prenons une certaine droite ZH. Si la droite  $\Gamma A$  est ajoutée à elle-même un certain nombre de fois, cette droite ainsi ajoutée à elle-même surpassera la

droite  $\Delta$  (*Princ. 5*). Que cette droite soit ajoutée à elle-même, et que le multiple de cette droite soit égal à la droite A $\Theta$ ; et enfin que la droite ZH soit autant de fois multiple de la droite HE, que la droite A $\Theta$  l'est de la droite AR. La droite  $\Theta A$  sera à la droite AR comme ZH est à HE; et par inversion, la droite EH sera à la droite HZ comme AR est à A $\Theta$ . Mais la droite A $\Theta$  est plus grande que la droite  $\Delta$ , c'est-à-dire que la droite  $\Gamma B$ ; donc la raison de la droite  $\Gamma A$  à la droite A $\Theta$  est moindre que la raison de la droite  $\Gamma A$  à la droite  $\Gamma B$  ( $\alpha$ ). Donc, par addition, la raison de la droite EZ à la droite ZH est moindre que la raison de AB à BR. Mais la droite BR est égale à la droite  $\Delta$ ; donc la raison de EZ à ZH est



moindre que la raison de  $AB$  à  $\Delta$ . On a donc trouvé deux droites inégales qui remplissent les conditions de ce qui est proposé; c'est-à-dire, qu'on a trouvé deux droites inégales dont la raison de la plus grande à la plus petite est moindre que la raison de la plus grande quantité donnée à la plus petite.



#### PROPOSITION IV.

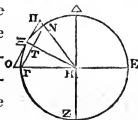
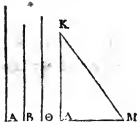
Deux quantités inégales et un cercle étant donnés, il est possible d'inscrire un polygone dans ce cercle, et de lui en circoncrire un autre, de manière que la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que la raison de la plus grande quantité à la plus petite.

Soient donnés les quantités  $A$ ,  $B$ , et le cercle  $\Gamma\Delta EZ$ : je dis qu'il est possible de faire ce qui est proposé.

Cherchons deux droites  $\Theta$ ,  $\kappa\Lambda$ , de manière que  $\Theta$  étant la plus grande, la raison de la droite  $\Theta$  à la droite  $\kappa\Lambda$  soit moindre

que la raison de la plus grande quantité donnée à la plus petite (3). Du point  $\Lambda$  et sur la droite  $\kappa\Lambda$ , élevons la perpendiculaire  $\Lambda M$ ; et du point  $\kappa$  menons la droite  $\kappa M$  égale à la droite  $\Theta$ ; ce qui peut se faire. Conduisons les deux diamètres  $RE$ ,  $\Delta Z$  perpendiculaires l'un sur l'autre. Si l'angle  $\Delta H\Gamma$  est partagé en deux parties égales, sa moitié en deux parties égales, et

ainsi de suite, il restera enfin un certain angle plus petit que le double de l'angle  $\Lambda \kappa M$ . Qu'on ait cet angle et que cet angle soit  $NH\Gamma$ . Menons la corde  $NR$ . La droite  $NR$  sera le côté d'un polygone équilatère; car puisque l'angle  $NH\Gamma$  mesure l'angle droit  $\Delta H\Gamma$ , et que l'arc  $NR$

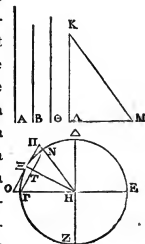


mesure le quart de la circonférence, l'arc  $NR$  mesurera la circonférence entière. Il est donc évident que la droite  $RN$  est le côté d'un polygone équilatère. Partageons l'angle  $NH\Gamma$  en deux parties égales par la droite  $H\Xi$ ; que la droite  $O\Xi\Pi$  touche le cercle au

point  $\alpha$  ; et menons les droites  $\text{HN}\Pi$ ,  $\text{H}\Gamma\Theta$  ; il est évident que la droite  $\text{NO}$  sera le côté d'un polygone circonscrit au cercle , équilatère et semblable au polygone inscrit dont le côté est  $\text{NR}$ . Puisque l'angle  $\text{NHR}$  est moindre que le double de l'angle  $\text{AKM}$  , et que l'angle  $\text{NHR}$  est double de l'angle  $\text{TH}\Gamma$  , l'angle  $\text{TH}\Gamma$  sera plus petit que l'angle

AKM. Mais les angles placés aux points A, T sont droits ; donc la raison de la droite MK à la droite AK est plus grande que la raison de la droite TH à la droite HT ( $\alpha$ ). Mais la droite TH est égale à la droite HZ ; donc la raison de HZ à HT, c'est-à-dire la raison de PO à NR

est moindre que la raison de  $mk$  à  $ka$ . Mais la raison de  $km$  à  $ka$  est moindre que la raison de  $a$  à  $b$ , et la droite  $no$  est le côté du polygone circonscrit, tandis que la droite  $rn$  est le côté du polygone inscrit. . . . . (6).  
Ce qu'il falloit trouver.

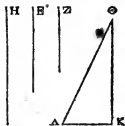




## PROPOSITION V.

Deux quantités inégales et un secteur étant donnés, il est possible de circonscrire un polygone à ce secteur, et de lui en inscrire un autre, de manière que la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que la raison de la plus grande quantité à la plus petite.

Soient  $E, Z$  deux quantités inégales; que la quantité  $E$  soit la plus grande; que  $AB\Gamma$  soit un cercle quelconque ayant pour centre le point  $\Delta$ ; au point  $\Delta$  construisons le secteur  $A\Delta B$ . Il faut circonscrire un polygone au secteur  $AB\Delta$ , et lui en inscrire un autre, de manière que celui-ci ayant tous ses côtés, excepté  $B\Delta$ ,  $\Delta A$ , égaux entre eux, les conditions de ce qui est proposé soient remplies.



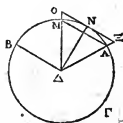
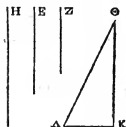
Cherchons deux droites inégales  $H, OK$ ,

de manière que  $H$  étant la plus grande, la raison de  $H$  à  $\Theta K$  soit moindre que la raison de la plus grande quantité à la plus petite; ce qui peut se faire (3). Ayant mené du point  $K$  sur la droite  $\Theta K$  la perpendiculaire  $K\Lambda$ , conduisons une droite  $\Theta\Lambda$  égale à la droite  $H$ ; ce qui peut se faire, puisque la droite  $H$  est plus grande que la droite  $\Theta K$ .

Si nous partageons l'angle  $\Lambda\Delta B$  en deux parties égales, sa moitié en deux parties égales, et ainsi de suite, il restera enfin un angle plus petit que le double de l'angle  $\Lambda\Theta K$ .

Que l'angle restant soit  $\Lambda\Delta M$ ; la droite  $AM$  sera le côté d'un polygone inscrit dans le secteur. Si l'angle  $\Lambda\Delta M$  est partagé en

deux parties égales par la droite  $\Delta N$ , et si par le point  $N$  on conduit la droite  $\Xi N O$  tangente au secteur, cette droite sera le côté d'un polygone circonscrit au secteur et semblable au polygone inscrit; et par la même raison que dans la proposition précédente, la raison



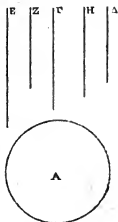
de  $EO$  à  $AM$  sera moindre que la raison de la quantité  $E$  à la quantité  $Z$ .

## PROPOSITION VI.

Un cercle et deux quantités inégales étant donnés, circoncrire à ce cercle un polygone et lui en inscrire un autre, de manière que la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que la raison de la plus grande quantité à la plus petite.

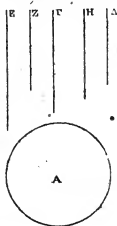
Soient le cercle  $A$ , et les deux quantités inégales  $E$ ,  $Z$ ; que la plus grande soit  $E$ . Il faut circoncrire un polygone à ce cercle, et lui en inscrire un autre, de manière que les conditions de ce qui est proposé soient remplies.

Je prends deux droites inégales  $r$ ,  $\Delta$ , de manière que  $r$  étant la plus grande, la raison de  $r$  à  $\Delta$  soit moindre que la raison de  $E$  à  $Z$  (3). Prenons une droite  $h$  moyenne proportionnelle entre  $r$  et  $\Delta$ ; la droite  $r$



sera plus grande que la droite  $h$ . Circonscrivons un polygone au cercle  $A$ , et inscrivons-lui un autre polygone, ainsi que nous l'avons enseigné (4), de manière que la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit

moindre que la raison de  $r$  à  $h$ . Il est évident que la raison doublée du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit sera moindre que la raison doublée de  $r$  à  $h$ . Mais la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit est doublée



de la raison du côté du premier au côté du second, à cause que ces polygones sont semblables; et la raison de la droite  $r$  à la droite  $\Delta$  est doublée de la raison de  $r$  à  $h$ ; donc la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit est moindre que la raison de  $r$  à  $\Delta$ ; donc la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit est encore moindre que la raison de  $E$  à  $Z$ .

Nous démontrerons semblablement que

deux quantités inégales et un secteur de cercle étant donnés, on peut circoncrire au secteur et lui inscrire un polygone, de manière que la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que la raison de la plus grande quantité à la plus petite.

Si un cercle ou un secteur et une surface quelconque sont donnés, il est évident que si l'on inscrit à ce cercle ou à ce secteur et ensuite aux segmens restans des polygones équilatères, il restera enfin des segmens de cercles ou de secteurs qui seront moindres que la surface donnée. Ces choses sont démontrées dans les Elémens (*a*).

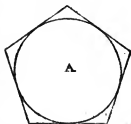
## PROPOSITION VII.

Il faut démontrer qu'étant donnés un cercle, ou un secteur et une surface, on peut circoncrire à ce cercle ou à ce secteur un polygone, de manière que la somme des segmens du polygone circonscrit soit moindre que la surface donnée. Il me sera permis de transporter au secteur ce que j'aurai dit du cercle.

Soient donnés le cercle A et une surface quelconque B : je dis qu'on peut circonscrire à ce cercle un polygone, de manière que la somme des segmens placés entre ce cercle et ce polygone soit moindre que la surface B.



Puisqu'on a deux quantités inégales, dont la plus grande est composée de la surface B et du cercle A, et dont la plus petite est ce même cercle, on pourra circonscrire au cercle A un polygone et lui en inscrire un autre, de manière que la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que la raison de la plus grande des quantités dont nous venons de parler à la plus petite; et le polygone circonscrit sera tel que la somme des segmens placés autour du cercle sera moindre que la surface donnée B.



En effet, puisque la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit est moindre que la raison de la somme de la surface B et du cercle A à ce même cercle, et que le

cercle est plus grand que le polygone inscrit, la raison du polygone circonscrit au cercle A sera encore moindre que la raison de la somme de la surface B et du cercle A à ce même cercle. Donc, par soustraction, la raison de la somme des segmens restans du polygone circonscrit au cercle A est moindre que la raison de la surface B au cercle A. Donc la somme des segmens du polygone circonscrit est moindre que la surface B ( $\alpha$ ). Cela peut se démontrer encore de la manière suivante.

Puisque la raison du polygone circonscrit au cercle A est moindre que la raison de la somme de la surface B et du cercle A à ce même cercle, il s'ensuit que le polygone circonscrit est moindre que la somme de la surface B et du cercle A. Donc la somme des segmens placés autour du cercle est moindre que la surface B. Nous ferons les mêmes raisonnemens par rapport au secteur.

### PROPOSITION VIII.

Si dans un cône droit on inscrit une pyramide ayant une base équilatère, la surface

de cette pyramide, la base exceptée, est égale à un triangle ayant une base égale au contour de la base de la pyramide, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du sommet sur un des côtés de la base.

Soit le cône droit dont la base est le cercle  $AB\Gamma$ . Inscrivons-lui une pyramide ayant pour base le triangle équilatéral  $AB\Gamma$ . Je dis que la surface de cette pyramide, la base exceptée, est égale au triangle dont nous avons parlé.

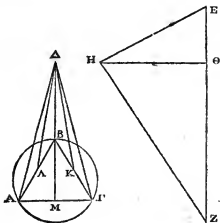
Car puisque le cône est droit, et que la base de la pyramide est équilatère, les hauteurs des triangles qui comprennent la pyramide sont égales entre elles. Mais ces triangles ont pour base les droites  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $\Gamma A$ , et pour hauteur la droite dont nous venons de parler; donc la somme de ces triangles, c'est-à-dire la surface de la pyramide, le triangle  $AB\Gamma$  excepté, est égale à un triangle ayant pour base une droite égale à la somme des droites  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $\Gamma A$ , et pour hauteur une droite égale à celle dont nous venons de parler.





## AUTRE DÉMONSTRATION PLUS CLAIRE:

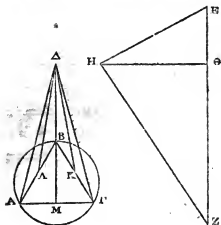
Soit le cône droit dont la base est le cercle  $AB\Gamma$ , et dont le sommet est le point  $\Delta$ . Inscrivons dans ce cône une pyramide ayant pour base le triangle équilatéral  $AB\Gamma$ ; et menons les droites  $\Delta A$ ,  $\Delta \Gamma$ ,  $\Delta B$ .



Je dis que la somme des triangles  $\Delta AB$ ,  $\Delta \Gamma$ ,  $\Delta B\Gamma$  est égale à un triangle dont la base est égale au contour du triangle  $AB\Gamma$ , et dont la perpendiculaire menée du sommet sur la base est égale à la perpendiculaire menée du point  $\Delta$  sur la droite  $B\Gamma$ .

Menons les perpendiculaires  $\Delta K$ ,  $\Delta A$ ,  $\Delta M$ ;

ces droites seront égales entre elles. Supposons un triangle  $EZH$  ayant une base égale au contour du triangle  $AB\Gamma$ , et une hauteur  $H\Theta$  égale à la droite  $\Delta A$ . Puisque la surface comprise sous les droites  $B\Gamma$ ,  $\Delta A$  est double du triangle  $\Delta B\Gamma$  ( $\alpha$ ); que la surface comprise sous les droites  $AB$ ,  $\Delta A$  est double du triangle  $A\Delta B$ , et que la surface comprise sous les droites



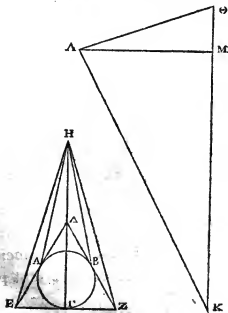
$A\Gamma$ ,  $\Delta M$  est double du triangle  $A\Delta\Gamma$ , la surface comprise sous le contour du triangle  $AB\Gamma$ , c'est-à-dire sous la droite  $E\Gamma$ , et sous la droite  $\Delta A$ , c'est-à-dire sous la droite  $H\Theta$ , est double de la somme des triangles  $A\Delta B$ ,  $B\Delta\Gamma$ ,  $A\Delta\Gamma$ . Mais la surface comprise sous les droites  $E\Gamma$ ,  $H\Theta$  est double du triangle  $EZH$ ; donc le

triangle  $EZH$  est égal à la somme des triangles  $A\Delta B$ ,  $B\Delta \Gamma$ ,  $A\Delta \Gamma$ .

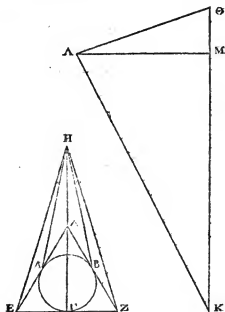
### PROPOSITION IX.

Si une pyramide est circonscrite à un cône droit, la surface de cette pyramide, la base exceptée, sera égale à un triangle ayant une base égale au contour de la base de la pyramide et une hauteur égale au côté du cône.

Soit un cône ayant pour base le cercle  $AB\Gamma$ .



Circonscrivons à ce cône une pyramide, de manière que sa base, c'est-à-dire le polygone  $\Delta EZ$  soit circonscrit au cercle  $AB\Gamma$ . Je dis que la surface de la pyramide, la base exceptée, est égale au triangle dont nous venons de parler.



En effet, puisque l'axe du cône est perpendiculaire sur la base, c'est-à-dire sur le cercle  $AB\Gamma$ , et que les droites menées du centre aux points de contact sont perpendiculaires sur les tangentes, les droites menées

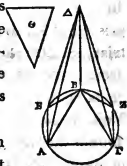
du sommet du cône aux points de contact, seront perpendiculaires sur les droites  $\Delta E$ ,  $ZE$ ,  $Z\Delta$ . Donc les perpendiculaires  $HA$ ,  $HB$ ,  $HC$ , dont nous venons de parler, sont égales entre elles; car ces perpendiculaires sont les côtés du cône. Supposons un triangle  $\Theta K\Lambda$ , ayant une base  $\Theta K$  égale au contour du triangle  $\Delta EZ$ , et une hauteur  $\Lambda M$  égale à  $HA$ . Puisque la surface comprise sous les droites  $\Delta E$ ,  $AH$  est double du triangle  $E\Delta H$ ; que la surface comprise sous les droites  $\Delta Z$ ,  $HB$  est double du triangle  $\Delta ZH$ , et qu'enfin la surface comprise sous les droites  $EZ$ ,  $HC$  est double du triangle  $EZH$ ; la surface comprise sous les droites  $\Theta K$ ,  $AH$ , c'est-à-dire  $M\Lambda$ , est double de la somme des triangles  $E\Delta H$ ,  $Z\Delta H$ ,  $EZH$ . Mais la surface comprise sous  $\Theta K$ ,  $\Lambda M$  est double du triangle  $\Lambda K\Theta$ ; donc la surface de la pyramide, la base exceptée, est égale à un triangle ayant une base égale au contour du triangle  $\Delta EZ$ , et une hauteur égale au côté du cône.

## PROPOSITION X.

Si l'on mène une corde dans le cercle qui est la base d'un cône droit, et si l'on joint,

par des droites, les extrémités de cette corde et le sommet du cône, le triangle terminé par cette corde et les droites qui joignent les extrémités de cette corde et le sommet du cône, sera plus petit que la surface du cône comprise entre les droites qui joignent les extrémités de cette corde et le sommet du cône.

Que le cercle  $AB\Gamma$  soit la base d'un cône droit, dont le point  $\Delta$  est le sommet. Menons la corde  $A\Gamma$ , et joignons les points  $A, \Gamma$  avec le point  $\Delta$  par les droites  $\Delta A, \Delta \Gamma$ . Je dis que le triangle  $\Delta A\Gamma$  est plus petit que la surface du cône comprise entre les droites  $\Delta A, \Delta \Gamma$ .

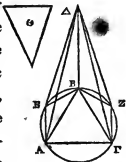


Partageons l'arc  $AB\Gamma$  en deux parties égales au point  $B$ , et menons les droites  $AB, \Gamma B, \Delta B$ . La somme des triangles  $AB\Delta, B\Gamma\Delta$  sera certainement plus grande que le triangle  $\Delta A\Gamma$ . Que la surface  $\Theta$  soit l'excès de la somme des deux premiers triangles sur le triangle  $\Delta A\Gamma$ . La surface  $\Theta$  sera ou plus petite que la somme des segmens  $AB, B\Gamma$ , ou elle n'est pas plus petite. Suppo-

sons d'abord qu'elle ne soit pas plus petite. Puisque l'on a deux surfaces, dont l'une est celle du cône comprise entre  $A\Delta$ ,  $\Delta B$ , avec le segment  $AEB$ , et dont l'autre est le triangle  $A\Delta B$ , et que ces deux surfaces ont pour limite le contour du triangle  $A\Delta B$ , la première qui comprend la seconde sera plus grande que la seconde qui est comprise par la première (*Prop. 4*). Donc la surface du cône comprise entre  $A\Delta$ ,  $\Delta B$ , avec le segment  $AEB$ , est plus grande que le triangle  $AB\Delta$ . Semblablement la surface du cône comprise entre  $B\Delta$ ,  $\Delta \Gamma$ , avec le segment  $B\Gamma$ , est plus grande que le triangle  $B\Delta \Gamma$ . Donc la surface totale du cône comprise entre  $A\Delta$ ,  $\Delta \Gamma$ , avec la surface  $\theta$ , est plus grande que la somme des triangles dont nous venons de parler. Mais la somme des triangles dont nous venons de parler, est égale au triangle  $A\Delta \Gamma$  réuni à la surface  $\theta$ ; donc si l'on retranche la surface commune  $\theta$ , la surface restante du cône qui est comprise entre  $A\Delta$ ,  $\Delta \Gamma$ , sera plus grande que le triangle  $A\Delta \Gamma$ .

Que la surface  $\theta$  soit moindre que la somme des segmens  $AB$ ,  $B\Gamma$ . Si l'on partage les arcs  $AB$ ,  $B\Gamma$  en deux parties égales, et

leurs moitiés en deux parties égales, et ainsi de suite, il restera enfin des segmens dont la somme sera moindre que la surface  $\Theta$ . Que les segmens restans soient ceux qui sont appuyés sur les droites  $AE, EB, BZ, ZF$ ; et menons les droites  $\Delta E, \Delta Z$ . Par la même raison, la surface du cône comprise entre  $\Delta\Delta, \Delta E$ , avec le segment appuyé sur  $AE$ , sera plus grande que le triangle  $\Delta\Delta E$ ; et la surface comprise entre  $\Delta\Delta, \Delta B$ , avec le segment appuyé sur  $EB$ , est aussi plus grande que le triangle  $\Delta\Delta B$ . Donc la surface du cône comprise entre  $\Delta\Delta, \Delta B$ , avec les segmens  $AE, EB$ , est plus grande que la somme des triangles  $\Delta\Delta E, \Delta\Delta B$ ; et puisque la somme des triangles  $\Delta\Delta E, \Delta\Delta B$  est plus grande que le triangle  $\Delta\Delta B$ , ce qui est démontré, la surface du cône comprise entre  $\Delta\Delta, \Delta B$ , avec les segmens appuyés sur  $AE, EB$  sera encore plus grande que le triangle  $\Delta\Delta B$ . Par la même raison, la surface comprise entre  $\Delta B, \Delta F$ , avec les segmens appuyés sur  $BZ, ZF$ , sera plus grande que le triangle  $\Delta BF$ . Donc la surface totale comprise entre





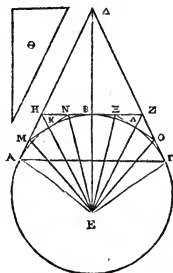
$\Delta\Delta$ ,  $\Delta\Gamma$ , avec les segmens dont nous venons de parler, est plus grande que la somme des triangles  $AB\Delta$ ,  $\Delta B\Gamma$ . Mais la somme de ces triangles est égale au triangle  $\Delta\Delta\Gamma$  réuni à la surface  $\Theta$ , et les segmens dont nous venons de parler sont moindres que la surface  $\Theta$ ; donc la surface restante comprise entre  $\Delta\Delta$ ,  $\Delta\Gamma$  est plus grande que le triangle  $\Delta\Delta\Gamma$ .

### PROPOSITION XL

Si l'on mène des tangentes au cercle qui est la base d'un cône droit; si ces tangentes sont dans le même plan que ce cercle et se rencontrent mutuellement; et si, des points de contact et du point où ces droites se rencontrent, on mène des droites au sommet du cône, la somme des triangles terminés par ces tangentes et par les droites qui joignent leurs extrémités et le sommet du cône, sera plus grande que la surface du cône comprise entre les droites qui joignent les points de contact et le sommet du cône.

Soit un cône ayant pour base le cercle  $AB\Gamma$ , et pour sommet le point  $E$ : menons les droites  $\Delta\Delta$ ,  $\Delta\Gamma$ , tangentes au cercle  $AB\Gamma$ ; que

ces tangentes soient dans le même plan que ce cercle, et du point  $E$ , qui est le sommet du cône, menons aux points  $A, \Delta, \Gamma$  les droites  $EA, E\Delta, E\Gamma$ . Je dis que la somme des triangles  $A\Delta E, \Delta E\Gamma$  est plus grande que la surface du cône comprise entre les droites  $AE, \Gamma E$  et l'arc  $AB\Gamma$ .

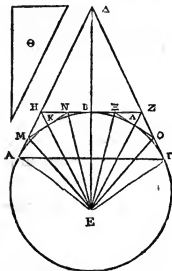


Menons une droite  $HBZ$  tangente au cercle et parallèle à la droite  $A\Gamma$ . L'arc  $AB\Gamma$  sera certainement partagé en deux parties égales au point  $B$ . Des points  $H, Z$  menons au point  $E$  les droites  $HE, ZE$ . Puisque la somme des droites  $H\Delta, \Delta Z$  est plus grande que la droite  $HZ$ , si

l'on ajoute de part ou d'autre les droites  $HA$ ,  $ZI$ , la somme des droites  $A\Delta$ ,  $\Delta I$  sera plus grande que la somme des droites  $AH$ ,  $HZ$ ,  $ZI$ . Mais les droites  $AE$ ,  $EB$ ,  $EI$ , qui sont les côtés d'un cône droit, sont égales entre elles et ces droites sont perpendiculaires sur les tangentes du cercle  $ABI$ , ainsi que cela est démontré dans un lemme; donc la somme des surfaces comprises sous ces perpendiculaires et sous les bases des triangles  $A\Delta$ ,  $\Delta EI$ , est plus grande que la somme des surfaces comprises sous ces mêmes perpendiculaires et sous les bases des triangles  $AHE$ ,  $HEZ$ ,  $ZEI$ ; parce que la somme des bases  $AH$ ,  $HZ$ ,  $ZI$  est plus petite que la somme des bases  $I\Delta$ ,  $\Delta A$ , tandis que les hauteurs sont égales, puisqu'il est évident que la droite menée du sommet du cône droit au point de contact de la base est perpendiculaire sur la tangente. Que la surface  $\Theta$  soit l'excès de la somme des triangles  $A\Delta$ ,  $\Delta EI$  sur la somme des triangles  $AHE$ ,  $HEZ$ ,  $ZEI$ . La surface  $\Theta$  sera ou plus petite que la somme des segmens  $AHB$ ,  $BZI$  placés autour de l'arc  $ABI$ , ou cette surface ne sera pas plus petite.

Supposons d'abord que la surface  $\Theta$  ne

soit pas plus petite. Puisque l'on a deux surfaces composées, dont l'une est la surface de la pyramide, qui a pour base le trapèze  $HATZ$  et pour sommet le point  $E$ , et dont l'autre est la surface du cône comprise entre  $AE$ ,  $ET$  avec le segment  $ABT$ , et que ces deux



surfaces ont pour limite le contour du triangle  $AET$ ; il est évident que la surface de la pyramide, le triangle  $AET$  excepté, est plus grande que la surface du cône comprise entre  $AE$ ,  $ET$ , réunie au segment  $ABT$  (*Princ. 4*). Donc si l'on retranche le segment commun  $ABT$ , la somme des triangles  $AHE$ ,  $HEZ$ ,  $ZET$

restans, avec la somme des segmens AHB, BZT placés autour du cercle, sera plus grande que la surface du cône comprise entre les droites AE, EF. Mais la surface  $\Theta$  n'est pas plus petite que la somme des segmens AHB, BZT placés autour du cercle; donc la somme des triangles AHE, HEZ, ZEF, avec la surface  $\Theta$ , est plus grande que la surface du cône comprise entre AE, EF. Mais la somme des triangles AHE, HEZ, ZEF, avec la surface  $\Theta$ , est égale à la somme des triangles AED, DEF; donc la somme des triangles AED, DEF est plus grande que la surface du cône dont nous venons de parler.

Supposons en second lieu que la surface  $\Theta$  soit plus petite que la somme des segmens placés autour du cercle. Si l'on circonscrit continuellement des polygones aux segmens, en partageant les arcs en deux parties égales, et en menant des tangentes, il restera enfin certains segmens dont la somme sera plus petite que la surface  $\Theta$ . Que les segmens restans soient AMK, KNB, BZA, AOG, et que la somme de ces segmens soit plus petite que la surface  $\Theta$ . Menons des droites au point E. Il est encore évident que la somme des



avec les segmens restans  $AMK$ ,  $KNB$ ,  $B\Xi A$ ,  $\Lambda O\Gamma$ , placés autour du cercle, sera plus grande que la surface du cône comprise entre  $AE$ ,  $EF$ . Mais la surface  $\Theta$  est plus grande que la somme des segmens restans dont nous venons de parler et qui sont placés autour du cercle : et l'on a démontré que la somme des triangles  $AEH$ ,  $HEZ$ ,  $ZEF$  est plus grande que la somme des triangles  $AEM$ ,  $MEN$ ,  $NE\Xi$ ,  $\Xi EO$ ,  $O\Gamma F$ ; donc à plus forte raison la somme des triangles  $AEH$ ,  $HEZ$ ,  $ZEF$  avec la surface  $\Theta$ , c'est-à-dire, la somme des triangles  $\Lambda\Delta E$ ,  $\Delta EF$  est plus grande que la surface du cône comprise entre  $AE$ ,  $EF$ .

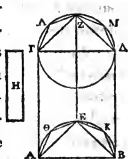
## PROPOSITION XII.

La surface d'un cylindre droit, comprise entre deux droites placées dans sa surface, est plus grande que le parallélogramme terminé par ces deux droites et par celles qui joignent leurs extrémités.

Soit le cylindre droit dont une des bases est le cercle  $AB$ , et dont la base opposée est le cercle  $\Gamma\Delta$ . Menons les droites  $AF$ ,  $BD$ . Je dis que la surface du cylindre comprise entre

les droites  $AT$ ,  $BD$  est plus grande que le parallélogramme  $ATDB$ .

Partageons les arcs  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  en deux parties égales aux points  $E$ ,  $Z$ ; et menons les droites  $AE$ ,  $EB$ ,  $\Gamma Z$ ,  $Z\Delta$ . Puisque la somme des droites  $AE$ ,  $EB$  est plus grande que la droite  $AB$ , et que les parallélogrammes construits sur ces droites ont la même hauteur, la somme des parallélogrammes dont les bases sont les droites  $AE$ ,  $EB$  sera plus grande que le parallélogramme  $AB\Gamma$ ; car leur hauteur est la même que celle du cylindre. Que l'excès de la somme des parallélogrammes dont les bases sont  $AE$ ,  $EB$  sur le parallélogramme  $AB\Gamma$  soit la surface  $H$ . La surface  $H$  sera ou plus petite que la somme des segmens plans  $AE$ ,  $EB$ ,  $\Gamma Z$ ,  $Z\Delta$ , ou elle ne sera pas plus petite. Supposons d'abord qu'elle ne soit pas plus petite. Puisque la surface du cylindre qui est comprise entre les droites  $AT$ ,  $BD$ , avec les segmens  $AEB$ ,  $\Gamma Z\Delta$ , a pour limite le plan du parallélogramme  $AB\Gamma$ ; que la surface qui est composée des parallélogrammes dont les bases

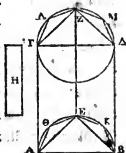




sont  $AE$ ,  $EB$  et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, avec les triangles  $AEB$ ,  $\Gamma Z\Delta$ , a aussi pour limite le plan du parallélogramme  $AB\Delta\Gamma$ ; que l'une de ces surfaces comprend l'autre, et que ces deux surfaces sont concaves du même côté, la surface cylindrique comprise entre les droites  $AF$ ,  $B\Delta$ , avec les segmens plans  $AEB$ ,  $\Gamma Z\Delta$ , sera plus grande que la surface qui est composée non-seulement des parallélogrammes dont les bases sont  $AE$ ,  $EB$ , et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, mais encore des triangles  $AEB$ ,  $\Gamma Z\Delta$  (*Princ. 4*). Donc si l'on retranche les triangles  $AEB$ ,  $\Gamma Z\Delta$ , la surface cylindrique restante qui est comprise entre les droites  $AF$ ,  $B\Delta$ , avec les segmens plans  $AE$ ,  $EB$ ,  $\Gamma Z$ ,  $Z\Delta$ , sera plus grande que la surface composée des parallélogrammes dont les bases sont les droites  $AE$ ,  $EB$ , et dont la hauteur est la même que celle du cylindre. Mais la somme des parallélogrammes dont les bases sont  $AE$ ,  $EB$ , et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, est égale au parallélogramme  $AF\Delta B$  réuni à la surface  $H$ ; donc la surface cylindrique restante qui est comprise entre les droites  $AF$ ,  $B\Delta$  est

plus grande que le parallélogramme  $AG\Delta B$ .

Supposons en second lieu que la surface  $H$  soit plus petite que la somme des segmens plans  $AE, EB, \Gamma Z, Z\Delta$ . Si l'on partage en deux parties égales chacun des arcs  $AE, EB, \Gamma Z, Z\Delta$  aux points  $\Theta, K, \Lambda, M$ ; si l'on mène les droites  $A\Theta, \Theta E, EK, KB, \Gamma\Lambda, \Lambda Z, ZM, M\Delta$ ; si l'on retranche les triangles  $A\Theta E, EKB, \Gamma\Lambda Z, ZM\Delta$ , dont la somme n'est pas plus petite que la moitié de la somme des segmens plans  $AE, EB, \Gamma Z, Z\Delta$ , et si l'on continue de faire la même chose, il restera enfin certains segmens dont la somme sera moindre que



la surface  $H$ . Que les segmens restans soient  $A\Theta, \Theta E, EK, KB, \Gamma\Lambda, \Lambda Z, ZM, M\Delta$ . Nous démontrerons de la même manière que la somme des parallélogrammes dont les bases sont  $A\Theta, \Theta E, EK, KB$ , et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, sera plus grande que la somme des parallélogrammes dont les bases sont les droites  $AE, EB$ , et dont la hauteur est la même que celle du cylindre. Mais la surface du cylindre comprise entre

les droites  $AF$ ,  $BD$ , avec les segmens plans  $AEB$ ,  $FZD$ , et la surface qui est composée des parallélogrammes dont les bases sont  $AO$ ,  $OE$ ,  $EK$ ,  $KB$ , et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, avec les figures rectilignes  $AOEKB$ ,  $FZMΔ$ , ont pour limite le plan du parallélogramme  $AFDB$ ; donc si l'on retranche les figures rectilignes  $AOEKB$ ,  $FZMΔ$ , la surface cylindrique restante qui est comprise entre les droites  $AF$ ,  $BD$ , avec les segmens plans  $AO$ ,  $OE$ ,  $EK$ ,  $KB$ ,  $FA$ ,  $AZ$ ,  $ZM$ ,  $MΔ$ , sera plus grande que la surface composée des parallélogrammes dont les bases sont les droites  $AO$ ,  $OE$ ,  $EK$ ,  $KB$ , et dont la hauteur est la même que celle du cylindre. Mais la somme des parallélogrammes dont les bases sont  $AO$ ,  $OE$ ,  $EK$ ,  $KB$ , et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, est plus grande que la somme des parallélogrammes dont les bases sont  $AE$ ,  $EB$  et dont la hauteur est la même que celle du cylindre; donc la surface cylindrique comprise entre les droites  $AF$ ,  $BD$ , avec les segmens plans  $AO$ ,  $OE$ ,  $EK$ ,  $KB$ ,  $FA$ ,  $AZ$ ,  $ZM$ ,  $MΔ$ , est plus grande que la somme des parallélogrammes dont les bases sont les droites  $AE$ ,  $EB$ , et dont la hauteur est la

même que celle du cylindre. Mais la somme des parallélogrammes dont les bases sont les droites  $AE$ ,  $EB$ , et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, est égale au parallélogramme  $AT\Delta B$  réuni à la surface  $H$ ; donc la surface cylindrique comprise entre les droites  $AT$ ,  $B\Delta$ , avec les segmens plans  $A\Theta$ ,  $\Theta E$ ,  $EK$ ,  $KB$ ,  $\Gamma A$ ,  $\Lambda Z$ ,  $ZM$ ,  $M\Delta$ , est plus grande que le parallélogramme  $AT\Delta B$  réuni à la surface  $H$ . Mais la somme des segmens  $A\Theta$ ,  $\Theta E$ ,  $EK$ ,  $KB$ ,  $\Gamma A$ ,  $\Lambda Z$ ,  $ZM$ ,  $M\Delta$ , est plus petite que la surface  $H$ ; donc la surface cylindrique restante comprise entre les droites  $AT$ ,  $B\Delta$  est plus grande que le parallélogramme  $AT\Delta B$ .

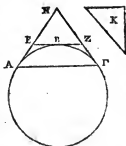
### PROPOSITION XIII.

Si par les extrémités de deux droites qui sont dans la surface d'un cylindre droit quelconque, on mène des tangentes aux cercles qui sont les bases du cylindre, si ces droites sont dans le plan de ces cercles et si elles se rencontrent, la somme des parallélogrammes compris sous les tangentes et sous les côtés du cylindre, sera plus grande

que la surface cylindrique comprise entre les droites qui sont dans sa surface.

Que le cercle  $AB\Gamma$  soit la base d'un cylindre droit quelconque, et que dans la surface de ce cylindre soient deux droites ayant pour extrémités les points  $A, \Gamma$ ; par les points

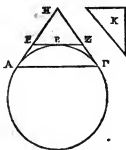
$A, \Gamma$  menons au cercle  $AB\Gamma$  des tangentes qui soient dans le même plan que lui et qui se coupent mutuellement au point  $H$ . Concevons que dans l'autre base du cylindre,



et par les extrémités des droites qui sont dans sa surface on ait mené des droites tangentes au cercle. Il faut démontrer que la somme des parallélogrammes compris sous les tangentes et sous les côtés du cylindre est plus grande que la surface du cylindre construite sur l'arc  $AB\Gamma$ .

Menons au cercle  $AB\Gamma$  la tangente  $EZ$ ; et des points  $E, Z$  menons au plan de la base supérieure des droites parallèles à l'axe du cylindre. La somme des parallélogrammes compris sous les droites  $AH, H\Gamma$  et sous les côtés du cylindre est plus grande que la

somme des parallélogrammes compris sous les droites AE, EZ, ZΓ, et sous les côtés du cylindre. Car puisque la somme des droites EH, HZ est plus grande que la droite EZ, si on ajoute de part et d'autre les droites AE, ZΓ, la somme des droites HA, HΓ sera plus grande que la somme des droites AE, EZ, ZΓ. Que l'excès de la somme des parallélogrammes compris sous les droites HA, HΓ, et sous les côtés du cylindre sur la somme des parallélo-



grammes compris sous les droites  $AE$ ,  $EZ$ ,  $ZF$  et sous les côtés du cylindre, soit la surface  $\kappa$ . La moitié de la surface  $\kappa$  sera ou plus grande que la somme des figures comprises entre les droites  $AE$ ,  $EZ$ ,  $ZF$ , et les arcs  $AB$ ,  $BF$ ; ou elle ne sera pas plus grande. Supposons d'abord qu'elle soit plus grande. Puisque le contour du parallélogramme construit sur la droite  $AF$  est la limite de la surface qui est composée des parallélogrammes construits sur les droites  $AE$ ,  $EZ$ ,  $ZF$ , du trapèze  $AEFZ$  et de celui qui lui est opposé dans l'autre base du cylindre, et que le contour du pa-

rallélogramme construit sur  $AI$  est aussi la limite de la surface qui est composée de la surface du cylindre construite sur l'arc  $ABT$ , du segment  $ABT$ , et de celui qui lui est opposé, les surfaces dont nous venons de parler ont la même limite dans un même plan. Mais l'une et l'autre de ces surfaces sont concaves du même côté, et l'une de ces surfaces est comprise par l'autre, le reste étant commun; donc la surface qui est comprise est la plus petite (*Princ. 4*). Donc si on retranche les parties communes, c'est-à-dire, le segment  $ABT$  et celui qui lui est opposé, la surface du cylindre construite sur l'arc  $ABT$  sera plus petite que la surface composée non-seulement des parallélogrammes construits sur les droites  $AE$ ,  $EZ$ ,  $ZT$ , mais encore des segments  $AEB$ ,  $BZT$  et de ceux qui leur sont opposés. Mais la surface composée des parallélogrammes dont nous venons de parler, avec les segments dont nous venons aussi de parler, est plus petite que la surface composée des parallélogrammes construits sur les droites  $AH$ ,  $HT$ ; car la somme des parallélogrammes construits sur les droites  $AE$ ,  $EZ$ ,  $ZT$ , avec la surface  $K$ , qui est plus grande que la somme

des segmens AEB, BZΓ, est égale à la somme des parallélogrammes construits sur AH, HR; donc la somme des parallélogrammes compris sous la droite AH, RH et sous les côtés du cylindre est plus grande que la surface du cylindre construite sur l'arc ABR.

Si la surface  $\kappa$  n'étoit pas plus grande que la somme des segmens AEB, BZΓ, on meneroit des tangentes au cercle, de manière que la somme des segmens restans placés autour du cercle fût moindre que la moitié de la surface  $\kappa$  (7); et l'on démontreroit le reste comme on l'a fait plus haut.

Ces choses étant démontrées, les propositions suivantes découlent nécessairement de ce qui a été dit plus haut.

La surface d'une pyramide inscrite dans un cône droit, la base exceptée, est plus petite que la surface du cône.

Car chacun des triangles qui renferment la pyramide est moindre que la surface du cône comprise entre les côtés du triangle. Donc la surface totale de la pyramide, la base exceptée, est moindre que la surface du cône.



La surface de la pyramide circonscrite à un cône droit, la base exceptée, est plus grande que la surface du cône.

Si un prisme est inscrit dans un cylindre droit, la surface du prisme, qui est composée de parallélogrammes, est plus petite que la surface du cylindre, la base exceptée.

Car chaque parallélogramme du prisme est moindre que la surface du cylindre construite sur ce parallélogramme.

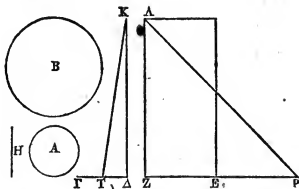
Si un prisme est circonscrit à un cylindre droit, la surface du prisme composée de parallélogrammes est plus grande que la surface du cylindre, la base exceptée.

#### PROPOSITION XIV.

La surface d'un cylindre droit quelconque, la base exceptée, est égale à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cylindre et le diamètre de sa base.

Que le cercle  $A$  soit la base d'un cylindre droit quelconque; que la droite  $\Gamma\Delta$  soit égale au diamètre du cercle  $A$ , et la droite  $EZ$  égale au côté du cylindre; que la droite  $H$  soit

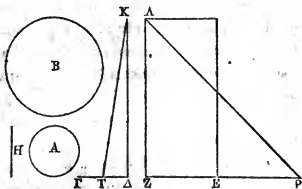
moyenne proportionnelle entre  $\Delta\Gamma$ ,  $EZ$ ; et supposons un cercle  $B$  dont le rayon soit égal à la droite  $H$ . Il faut démontrer que le cercle  $B$  est égal à la surface du cylindre; la base exceptée.



Car si ce cercle n'est pas égal à la surface du cylindre, il est plus grand ou plus petit. Supposons, si cela est possible, qu'il soit plus petit. Puisque l'on a deux quantités inégales, la surface du cylindre et le cercle  $B$ , on pourra inscrire dans le cercle  $B$  un polygone équilatère et lui en circonscrire un autre, de manière que la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que la raison de la surface du cylindre au cercle  $B$  (6). Supposons que l'on ait circonscrit au cercle  $A$  un polygone semblable à

celui qui est circonscrit au cercle B ; et concevons que le polygone circonscrit au cercle A soit la base d'un prisme circonscrit à ce cylindre ; que la droite  $\kappa\Delta$  soit égale au contour du polygone circonscrit au cercle A ; que la droite  $\Lambda Z$  soit égale à cette même droite  $\kappa\Delta$ , et que la droite  $\tau\Gamma$  soit la moitié de la droite  $\Gamma\Delta$ . Le triangle  $\kappa\Delta\Gamma$  sera égal au polygone circonscrit au cercle A ; parce que la base de ce triangle est égale au contour de ce polygone, et que sa hauteur est égale au rayon du cercle A ; et le parallélogramme  $E\Lambda$  sera égal à la surface du prisme circonscrit au cylindre, parce que ce parallélogramme est compris sous le côté du cylindre et sous une droite égale au contour de la base du prisme. Faisons la droite  $E\Gamma$  égale à la droite  $EZ$ . Le triangle  $ZPA$  sera égal au parallélogramme  $E\Lambda$ , et par conséquent à la surface du prisme. Mais les polygones circonscrits aux cercles A, B sont semblables ; donc ces polygones sont entre eux comme les quarrés des rayons des cercles A, B. Donc le triangle  $\kappa\Gamma\Delta$  est au polygone circonscrit au cercle B comme le quarré de  $\Gamma\Delta$  est au quarré de H ; car les droites  $\Gamma\Delta$ , H sont égales

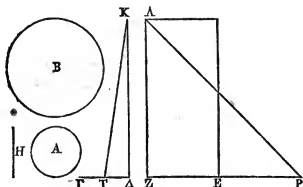
aux rayons des cercles A, B. Mais le quarré de  $\tau\Delta$  est au quarré de H comme la droite  $\tau\Delta$  est à la droite  $PZ$ ; car la droite H est moyenne proportionnelle entre  $\tau\Delta$ ,  $PZ$ , attendu qu'elle est moyenne proportionnelle entre  $\tau\Delta$ ,  $EZ$ .



Mais pourquoi la droite H est-elle moyenne proportionnelle entre  $\tau\Delta$ ,  $PZ$  (α)? Le voici : Puisque la droite  $\Delta\tau$  est égale à la droite  $\tau\tau$ , et que la droite  $PE$  est aussi égale à la droite  $EZ$ , la droite  $\tau\Delta$  est double de la droite  $\tau\Delta$ , et la droite  $PZ$  double de  $PE$ . Donc la droite  $\Delta\tau$  est à la droite  $\Delta\tau$  comme la droite  $PZ$  est à la droite  $ZE$ . Donc la surface comprise sous les droites  $\tau\Delta$ ,  $EZ$  est égale à la surface comprise sous les droites  $\tau\Delta$ ,  $PZ$ . Mais le quarré construit sur la droite H est égal à la surface comprise sous  $\tau\Delta$ ,  $EZ$ ; donc le quarré con-

struit à la droite  $h$  est aussi égal à la surface comprise sous  $\tau\Delta$ ,  $pz$ . Donc  $\tau\Delta$  est à  $h$  comme  $h$  est à  $pz$ . Donc le quarré construit sur la droite  $\tau\Delta$  est au quarré construit sur la droite  $h$  comme la droite  $\tau\Delta$  est à la droite  $pz$ ; car lorsque trois droites sont proportionnelles entre elles, la première est à la troisième comme la figure construite sur la première droite est à la figure semblable construite de la même manière sur la seconde. Mais le triangle  $KT\Delta$  est au triangle  $p\Delta z$  comme la droite  $\tau\Delta$  est à la droite  $pz$ , parce que les droites  $K\Delta$ ,  $\Delta z$  sont égales entre elles; donc le triangle  $KT\Delta$  est au polygone circonscrit au cercle  $B$  comme le triangle  $KT\Delta$  est au triangle  $p\Delta z$ . Donc le triangle  $z\Delta p$  est égal au polygone circonscrit au cercle  $B$ . Donc la surface du prisme qui est circonscrit au cylindre est aussi égale au polygone qui est circonscrit au cercle  $B$ . Mais la raison du polygone qui est circonscrit au cercle  $B$  au polygone qui est inscrit dans ce même cercle, est moindre que la raison de la surface du cylindre  $A$  au cercle  $B$ ; donc la raison de la surface du prisme qui est circonscrit à ce cylindre au polygone qui est inscrit dans le

cercle B, est encore moindre que la raison de la surface du cylindre au cercle B, et par permutation. . . . (6), ce qui est impossible; car la surface du prisme circonscrit au cylindre est plus grande que la surface du

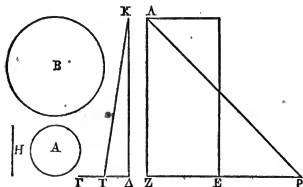


cylindre, ainsi que cela a été démontré (13); et le polygone inscrit dans le cercle B est moindre que le cercle B (1). Donc le cercle B n'est pas plus petit que la surface du cylindre.

Supposons en second lieu, si cela est possible, que le cercle B soit plus grand que la surface du cylindre. Imaginons qu'on ait inscrit dans le cercle B un polygone, et qu'on lui en ait circonscrit un autre, de manière que la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que la raison

du cercle B à la surface du cylindre (6). Inscrivons dans le cercle A un polygone semblable à celui qui est inscrit dans le cercle B; que le polygone inscrit dans le cercle A soit la base d'un prisme; que la droite  $\kappa\Delta$  soit égale au contour du polygone inscrit dans ce cercle, et que la droite  $z\Lambda$  soit égale à cette droite. Le triangle  $\kappa\tau\Delta$  sera plus grand que le polygone inscrit dans le cercle A; parce que ce triangle a une base égale au contour de ce polygone, et une hauteur plus grande que la perpendiculaire menée du centre sur un des côtés du polygone; et le parallélogramme EA sera égal à la surface du prisme inscrit, qui est composée de parallélogrammes; parce que cette surface est comprise sous le côté du cylindre, et sous une droite égale au contour du polygone qui est la base du prisme; donc le triangle PAZ est aussi égal à la surface de ce prisme. Mais les polygones inscrits dans les cercles A, B sont semblables; donc ces polygones sont entre eux comme les quarrés des rayons de ces cercles. Mais les triangles  $\kappa\tau\Delta$ ,  $z\phi\Lambda$  sont aussi entre eux comme les quarrés des rayons des cercles A, B ( $\gamma$ ); donc le polygone inscrit.

dans le cercle A est au polygone inscrit dans le cercle B comme le triangle  $K\Gamma\Delta$  est au triangle  $\Lambda ZP$ . Mais le polygone inscrit dans le cercle A est plus petit que le triangle  $K\Gamma\Delta$ ; donc le polygone inscrit dans le cercle B est



plus petit que le triangle  $\Lambda ZP$ . Donc le polygone inscrit dans le cercle B est aussi plus petit que la surface du prisme inscrit dans le cylindre, ce qui est impossible; car la raison du polygone qui est circonscrit au cercle B au polygone qui lui est inscrit, est moindre que la raison du cercle B à la surface du cylindre; donc par permutation.....(d). Mais le polygone circonscrit au cercle B est plus grand que ce même cercle B (2); donc le polygone inscrit dans le cercle B est plus grand que la surface du cylindre, et par con-

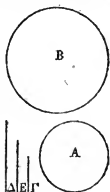


séquent plus grand que la surface du prisme. Donc le cercle B n'est pas plus grand que la surface du cylindre. Mais on a démontré qu'il n'est pas plus petit; donc il lui est égal.

## PROPOSITION XV.

La surface d'un cône droit quelconque, la base exceptée, est égale à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cône et le rayon du cercle qui est la base du cône.

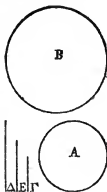
Soit le cône droit dont le cercle A est la base; que la droite r soit le rayon de la base; que la droite  $\Delta$  soit égale au côté du cône; que la droite E soit moyenne proportionnelle entre r,  $\Delta$ , et enfin que le cercle B ait pour rayon une droite égale à la droite E. Je dis que le cercle B est égal à la surface du cône, la base exceptée.



Car si le cercle B n'est pas égal à la surface du cône, la base exceptée, il est ou plus grand ou plus petit. Supposons d'abord qu'il

soit plus petit. Puisqu'on a deux quantités inégales, la surface du cône et le cercle B, et que la surface du cône est la plus grande, on peut inscrire dans le cercle B un polygone équilatère, et lui circonscrire un polygone semblable au premier, de manière que la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que la raison de la surface du cône au cercle B (6).

Imaginons que l'on ait circonscrit au cercle A un polygone semblable au polygone circonscrit au cercle B; et supposons que le polygone circonscrit au cercle A soit la base d'une pyramide qui ait le même sommet que le cône. Puisque les polygones circonscrits aux cercles A, B sont semblables, ils sont entre eux comme les quarrés des rayons de ces cercles; c'est-à-dire, comme les quarrés des droites r, E, ou comme les droites r,  $\Delta$ . Mais le polygone circonscrit au cercle A est à la surface de la pyramide circonscrite au cône, comme la droite r est à la droite  $\Delta$ . En effet, la droite r est égale à la



perpendiculaire menée du centre du cercle sur un des côtés du polygone; la droite  $\Delta$  est égale au côté du cône; et le contour du polygone est la hauteur commune de deux rectangles dont les moitiés sont le polygone circonscrit au cercle A, et la surface de la pyramide circonscrite au cône. Donc le polygone circonscrit au cercle A est au polygone circonscrit au cercle B, comme le polygone circonscrit au cercle A est à la surface de la pyramide circonscrite au cône. Donc la surface de la pyramide est égale au polygone circonscrit au cercle B. Donc puisque la raison du polygone qui est circonscrit au cercle B au polygone inscrit est moindre que la raison de la surface du cône au cercle B, la raison de la surface de la pyramide qui est circonscrite au cône au polygone inscrit dans le cercle B, sera moindre que la raison de la surface du cône au cercle B ( $\alpha$ ). Ce qui est impossible; car la surface de la pyramide est plus grande que la surface du cône, ainsi que nous l'avons démontré (15); et le polygone inscrit dans le cercle B est au contraire plus petit que le cercle B. Donc le cercle B n'est pas plus petit que la surface du cône.

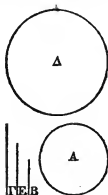
Je dis à présent que le cercle  $B$  n'est pas plus grand que la surface du cône. Car supposons, si cela est possible, que ce cercle soit plus grand. Supposons de nouveau qu'on ait inscrit dans le cercle  $B$  un polygone, et qu'on lui en ait circonscrit un autre; de manière que la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que la raison du cercle  $B$  à la surface du cône (6). Inscrivons dans le cercle  $A$  un polygone semblable à celui qui est inscrit dans le cercle  $B$ ; et concevons que ce polygone soit la base d'une pyramide, qui ait le même sommet que le cône. Puisque les polygones inscrits dans les cercles  $A$ ,  $B$  sont semblables, ces polygones sont entre eux comme les quarrés des rayons de ces cercles. Donc la raison du polygone inscrit dans le cercle  $A$  au polygone inscrit dans le cercle  $B$  est égale à la raison de  $r$  à  $\Delta$ . Mais la raison de  $r$  à  $\Delta$  est plus grande que la raison du polygone inscrit dans le cercle  $A$  à la surface de la pyramide inscrite dans le cône; car la raison du rayon du cercle  $A$  au côté du cône est plus grande que la raison de la perpendiculaire menée du centre sur le côté du polygone à la per-

pendiculaire menée du sommet du cône sur le côté du même polygone (6). Donc la raison du polygone inscrit dans le cercle A au polygone inscrit dans le cercle B est plus grande que la raison du premier polygone à la surface de la pyramide. Donc la surface de la pyramide est plus grande que le polygone inscrit dans le cercle B. Mais la raison du polygone qui est circonscrit au cercle B au polygone qui lui est inscrit, est moindre que la raison du cercle B à la surface du cône; donc la raison du polygone qui est circonscrit au cercle B à la surface de la pyramide inscrite dans le cône, est encore moindre que la raison du cercle B à la surface du cône . . . . . (7). Ce qui est impossible; car le polygone circonscrit est plus grand que le cercle B (2), tandis que la surface de la pyramide inscrite dans le cône est plus petite que la surface du cône (13). Donc le cercle B n'est pas plus grand que la surface du cône. Mais on a démontré qu'il n'est pas plus petit: donc il lui est égal.

## PROPOSITION XVI.

La surface d'un cône droit quelconque est à sa base comme le côté du cône est au rayon de sa base.

Soit un cône droit qui ait pour base le cercle A. Que la droite B soit égale au rayon du cercle A, et la droite r égale au côté de ce cône. Il faut démontrer que la surface du cône est au cercle A comme r est à B.

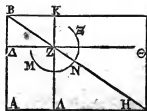


Prenons une droite E moyenne proportionnelle entre B, r; et supposons un cercle Δ qui ait un rayon égal à la droite E. Le cercle Δ sera égal à la surface du cône, ainsi que cela a été démontré dans le théorème précédent. Mais on a démontré aussi que le cercle Δ est au cercle A comme la droite r est à la droite B; car ces deux raisons sont égales chacune à la raison du quarré de la droite E au quarré de la droite B; parce que les cercles sont entre eux comme les quarrés décrits sur,

leurs diamètres, et par conséquent comme les quarrés décrits sur leurs rayons, à cause que ce qui convient aux diamètres convient aussi à leurs moitiés; or, les rayons des cercles  $A$ ,  $\Delta$  sont égaux aux droites  $B$ ,  $E$ .....( $\alpha$ ). Il est donc évident que la surface du cône est à la surface du cercle  $A$  comme la droite  $r$  est à la droite  $B$ .

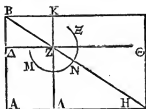
## L E M M E.

Soit le parallélogramme  $BAH$  et que  $BH$  soit sa diagonale. Que le côté  $BA$  soit coupé en deux parties d'une manière quelconque au point  $\Delta$ . Par le point  $\Delta$  menons la droite  $\Delta\Theta$  parallèle au côté  $AH$ , et par le point  $z$  la droite  $K\Lambda$ , parallèle au côté  $BA$ . Je dis que la surface comprise sous  $BA$ ,  $AH$  est égale à la surface comprise sous  $B\Delta$ ,  $\Delta z$ , et à la surface comprise sous  $\Delta A$  et sous une droite composée de  $\Delta z$ ,  $AH$  ( $\alpha$ ).



En effet, la surface comprise sous  $BA$ ,  $AH$  est la surface totale  $BH$ . Mais la surface com-

prise sous les droites  $B\Delta$ ,  $\Delta Z$  est la surface  $BZ$  ; la surface comprise sous  $\Delta A$ , et sous une droite composée de  $\Delta Z$ ,  $AH$ , est le gnomon  $MN\Xi$ , parce que la surface comprise sous les droites  $\Delta A$ ,  $AH$  est égale à la surface  $KH$ , le complément  $K\Theta$  étant égal au complément  $\Delta A$ , et enfin la surface comprise sous  $\Delta A$ ,  $\Delta Z$  est égale à la surface  $\Delta A$ . Donc la surface totale  $BH$ , c'est-à-dire celle qui est comprise sous les droites  $BA$ ,  $AH$  est égale à la surface comprise sous les droites  $B\Delta$ ,  $\Delta Z$ , et au gnomon  $MN\Xi$ , qui est égal à la surface comprise sous  $\Delta A$  et sous une droite composée de  $AH$ ,  $\Delta Z$ .



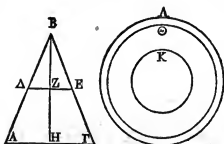
## PROPOSITION XVII.

Si un cône droit est coupé par un plan parallèle à la base, la surface comprise entre les plans parallèles est égale à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre la partie du côté du cône comprise entre les plans parallèles et entre une droite égale à la



somme des rayons des cercles qui sont dans les plans parallèles.

Soit un cône dont le triangle qui passe par l'axe soit égal au triangle  $AB\Gamma$ . Coupons ce

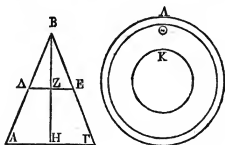


cône par un plan parallèle à la base ; que ce plan produise la section  $\Delta E$ , et que la droite  $BH$  soit l'axe de ce cône. Supposons un cercle dont le rayon soit moyen proportionnel entre la droite  $A\Delta$  et entre la somme des droites  $\Delta Z$ ,  $HA$  ; et que ce cercle soit  $\Theta$ . Je dis que ce cercle est égal à la surface du cône comprise entre  $\Delta E$ ,  $AT$ .

Supposons les deux cercles  $\Lambda$ ,  $\K$  ; que le carré construit sur le rayon du cercle  $\K$  soit égal à la surface comprise sous les droites  $B\Delta$ ,  $\Delta Z$ , et que le carré construit sur le rayon du cercle  $\Lambda$ , soit égal à la surface comprise sous les droites  $BA$ ,  $AH$ . Le cercle  $\Lambda$  sera

égal à la surface du cône  $AB\Gamma$ , et le cercle  $\kappa$  égal à la surface du cône  $\Delta EB$  (15).

En effet, la surface comprise sous  $BA$ ,  $AH$  est égale à la surface comprise sous  $B\Delta$ ,  $\Delta Z$ , et



à la surface comprise sous  $A\Delta$  et sous une droite composée  $\Delta Z$ ,  $AH$ , à cause que la droite  $\Delta Z$  est parallèle à la droite  $AH$  (16, *lemme*). Mais la surface comprise sous  $AB$ ,  $AH$  est égale au quarré construit sur le rayon du cercle  $\Lambda$ ; la surface comprise sous  $B\Delta$ ,  $\Delta Z$  est égale au quarré construit sur le rayon du cercle  $\kappa$ ; et la surface comprise sous  $\Delta A$  et sous une droite composée de  $\Delta Z$ ,  $AH$ , est égale au quarré construit sur le rayon du cercle  $\Theta$ . Donc le quarré construit sur le rayon du cercle  $\Lambda$  est égal à la somme des quarrés construits sur les rayons des cercles  $\kappa$ ,  $\Theta$ . Donc le cercle  $\Lambda$  est égal aux cercles  $\kappa$ ,  $\Theta$ . Mais le cercle  $\Lambda$  est égal à la surface du cône  $BA\Gamma$ , et le cercle  $\kappa$

égal à la surface du cône  $\triangle BE$ ; donc la surface restante comprise entre les plans parallèles  $\triangle E$ ,  $AF$  est égale à la surface du cercle  $\odot$ .

## L E M M E S.

1. Les cônes qui ont des hauteurs égales sont entre eux comme leurs bases, et ceux qui ont des bases égales sont entre eux comme leurs hauteurs.

2. Si un cylindre est coupé par un plan parallèle à sa base, les deux cylindres seront entre eux comme leurs axes.

3. Lorsque des cônes et des cylindres ont les mêmes bases, les cônes sont entre eux comme les cylindres ( $\alpha$ ).

4. Les bases des cônes égaux sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs de ces cônes; et les cônes dont les bases sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs sont égaux entre eux.

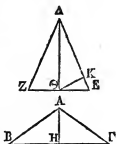
5. Les cônes dont les diamètres des bases et dont les hauteurs, c'est-à-dire les axes sont proportionnels, sont entre eux en raison triplée des diamètres de leurs bases.

Toutes ces choses ont été démontrées par ceux qui ont existé avant nous (6).

## PROPOSITION XVIII

Si l'on a deux cônes droits, si la surface de l'un est égale à la base de l'autre, et si la perpendiculaire menée du centre de la base du premier sur son côté, est égale à la hauteur du second, ces deux cônes sont égaux.

Soient les deux cônes droits  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ ; que la base du cône  $AB\Gamma$  soit égale à la surface du cône  $\Delta EZ$ ; que la hauteur  $AH$  soit égale à la perpendiculaire  $K\Theta$ , menée du centre  $\Theta$  sur un côté du cône, savoir sur  $\Delta E$ . Je dis que ces deux cônes sont égaux.



Puisque la base du cône  $AB\Gamma$  est égale à la surface du cône  $\Delta EZ$ , et que les choses qui sont égales entre elles ont la même raison avec une troisième, la base du cône  $AB\Gamma$  est à la base du cône  $\Delta EZ$  comme la surface du cône  $\Delta EZ$  est à la base du cône  $\Delta EZ$ . Mais la surface du cône  $\Delta EZ$  est à sa base comme  $\Delta\Theta$  est à  $\Theta K$ ; car on a démontré que la surface d'un cône droit quelconque est à sa base comme

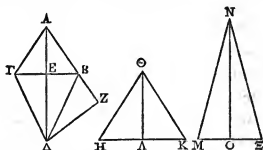
le côté du cône est au rayon de la base, c'est-à-dire comme  $\Delta E$  est à  $E\Theta$  (16); et la droite  $E\Delta$  est à la droite  $E\Theta$  comme la droite  $\Delta\Theta$  est à la droite  $\Theta K$ , parce que les triangles  $\Delta E\Theta$ ,  $\Delta K\Theta$  sont équiangles; et de plus la droite  $\Theta K$  est égale à la droite  $AH$ . Donc la base du cône  $BAT$  est à la base du cône  $\Delta EZ$  comme la hauteur du cône  $\Delta EZ$  est à la hauteur du cône  $ABT$ . Donc les bases des cônes  $ABT$ ,  $\Delta EZ$  sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs. Donc le cône  $BAT$  est égal au cône  $\Delta EZ$  (17, *lemm.* 4).

### PROPOSITION XIX.

Un rhombe quelconque composé de deux cônes droits est égal à un cône qui a une base égale à la surface de l'un des cônes qui composent le rhombe, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du sommet de l'autre cône sur le côté du premier cône.

Soit un rhombe  $ABT\Delta$  composé de deux cônes droits, dont la base est le cercle décrit autour du diamètre  $BT$ , et dont la hauteur est la droite  $A\Delta$ . Supposons un autre cône  $H\Theta K$ , qui ait une base égale à la surface du

cône  $AB\Gamma$ , et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du point  $\Delta$  sur le côté  $AB$  ou sur ce côté prolongé. Que cette perpendiculaire soit  $\Delta Z$ , et que la hauteur du cône



$\Theta H K$  soit la droite  $\Theta \Lambda$  égale à la droite  $\Delta Z$ . Je dis que le rhombe  $AB\Gamma\Delta$  est égal au cône  $H\Theta K$ .

Supposons un autre cône  $MN\Xi$ , dont la base soit égale à celle du cône  $AB\Gamma$  et dont la hauteur soit égale à  $\Lambda\Delta$ . Que la hauteur de ce cône soit  $NO$ . Puisque  $NO$  est égal à  $\Lambda\Delta$ , la droite  $NO$  est à la droite  $\Delta E$  comme  $\Lambda\Delta$  est à  $\Delta E$ . Mais  $\Lambda\Delta$  est à  $\Delta E$  comme le rhombe  $AB\Gamma\Delta$  est au cône  $B\Gamma\Delta$  ( $\alpha$ ); et  $NO$  est à  $\Delta E$  comme le cône  $MN\Xi$  est au cône  $B\Gamma\Delta$ ; parce que ces deux cônes ont des bases égales. Donc le cône  $MN\Xi$  est au cône  $B\Gamma\Delta$  comme le rhombe  $AB\Gamma\Delta$  est au cône  $B\Gamma\Delta$ . Donc le cône  $MN\Xi$  est égal au rhombe  $AB\Gamma\Delta$ . Mais la sur-

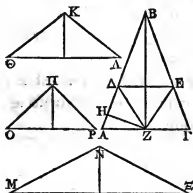
face du cône  $AB\Gamma$  est égale à la base du cône  $H\Theta K$ ; donc la surface du cône  $AB\Gamma$  est à sa base comme la base du cône  $H\Theta K$  est à la base du cône  $MNΞ$ , parce que la base du cône  $AB\Gamma$  est égale à la base du cône  $MNΞ$ . Mais la surface du cône  $AB\Gamma$  est à sa base comme  $AB$  est à  $BE$  (16), c'est-à-dire comme  $A\Delta$  est à  $\Delta Z$ ; car les triangles  $ABE$ ,  $A\Delta Z$  sont semblables. Donc la base du cône  $H\Theta K$  est à la base du cône  $MNΞ$  comme  $A\Delta$  est à  $\Delta Z$ . Mais la droite  $A\Delta$  est égale à la droite  $NO$ , par supposition, et la droite  $\Delta Z$  est aussi égale à la droite  $\Theta\Lambda$ ; donc la base du cône  $H\Theta K$  est à la base du cône  $MNΞ$  comme la hauteur  $NO$  est à la hauteur  $\Theta\Lambda$ . Donc les bases des cônes  $H\Theta K$ ,  $MNΞ$  sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs. Donc ces cônes sont égaux (17, *lemm. 4*). Mais on a démontré que le cône  $MNΞ$  est égal au rhombe  $AB\Gamma\Delta$ . Donc le cône  $H\Theta K$  est aussi égal au rhombe  $AB\Gamma\Delta$ .

## PROPOSITION XX.

Si un cône droit est coupé par un plan parallèle à la base, et si sur le cercle qui est produit par cette section, on conçoit un

cône ayant son sommet au centre de la base; si l'on retranche du cône total le rhombe produit par cette construction, le reste sera égal à un cône ayant une base égale à la surface du cône comprise entre les plans parallèles, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du centre de la base sur un côté du cône.

Soit le cône droit  $ABZ$ ; coupons ce cône



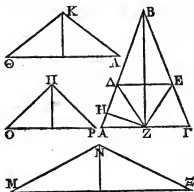
par un plan parallèle à la base; que ce plan produise la section  $\Delta E$ ; que le centre de la base soit le point  $Z$ , et que le cercle décrit autour du diamètre  $\Delta E$  soit la base d'un cône ayant son sommet au point  $Z$ . Le rhombe  $B\Delta ZE$  sera composé de deux cônes droits. Supposons un cône  $K\Theta\Delta$  dont la base soit égale à la surface comprise entre les



plans  $\Delta E$ ,  $A\Gamma$ , et dont la hauteur soit égale à la perpendiculaire  $ZH$  menée du point  $Z$  sur le côté  $AB$ . Je dis que si l'on retranche le rhombe  $B\Delta ZE$  du cône  $AB\Gamma$ , le reste sera égal au cône  $\Theta K\Lambda$ .

Soient les deux cônes  $MN\Xi$ ,  $ONP$ ; que la base du cône  $MN\Xi$  soit égale à la surface du cône  $AB\Gamma$ , et que sa hauteur soit égale à la droite  $ZH$ . Le cône  $MN\Xi$  sera égal au cône  $AB\Gamma$ ; car lorsque l'on a deux cônes droits, si la surface de l'un est égale à la base de l'autre, et si la perpendiculaire menée du centre de la base du premier sur son côté, est égale à la hauteur du second, ces deux cônes sont égaux (18). Que la base du cône  $ONP$  soit égale à la surface du cône  $\Delta BE$ , et sa hauteur égale à la droite  $ZH$ ; le cône  $ONP$  sera égal au rhombe  $B\Delta ZE$ , ainsi que cela a été démontré plus haut (19). Puisque la surface du cône  $AB\Gamma$  est composée de la surface du cône  $B\Delta E$ , et de la surface comprise entre  $\Delta E$ ,  $A\Gamma$ ; que la surface du cône  $AB\Gamma$  est égale à la base du cône  $MN\Xi$ ; que la surface du cône  $\Delta BE$  est égale à la base du cône  $ONP$ , et qu'enfin la surface comprise entre  $\Delta E$ ,  $A\Gamma$  est égale à la base du cône  $\Theta K\Lambda$ , la base du

cône  $MNΞ$  sera égale aux bases des cônes  $ΘΚΛ$ ,  $ΟΠΡ$ . Mais ces cônes ont la même hauteur ; donc le cône  $MNΞ$  est égal aux cônes  $ΘΚΛ$ ,



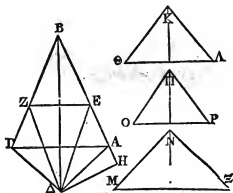
$ΟΠΡ$ . Mais le cône  $MNΞ$  est égal au cône  $ΑΒΓ$ , et le cône  $ΠΟΡ$  est égal au rhombe  $ΒΔΕΖ$  ; donc ce qui reste du cône  $ΑΒΓ$ , après en avoir ôté le rhombe  $ΒΔΕΖ$ , est égal au cône  $ΘΚΛ$ .

## PROPOSITION XXI.

Si un des cônes d'un rhombe composé de cônes droits est coupé par un plan parallèle à la base ; si le cercle produit par cette section est la base d'un cône qui a le même sommet que l'autre cône du rhombe ; et si du rhombe total, on retranche le rhombe

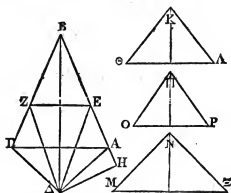
produit par cette construction, ce qui restera du rhombe total sera égal à un cône qui aura une base égale à la surface comprise entre les plans parallèles, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du sommet du second cône sur le côté du premier.

Que  $AB\Gamma\Delta$  soit un rhombe composé de



deux cônes droits; coupons un de ces cônes par un plan parallèle à la base, et que ce plan produise la section  $EZ$ ; que le cercle produit par cette section soit la base d'un cône qui ait son sommet au point  $\Delta$ , cette construction produira le rhombe  $EBZ\Delta$ . Retranchons ce rhombe du rhombe total; et supposons un cône  $\Theta\text{Κ}\Lambda$ , qui ait une base égale à la surface comprise entre  $\text{Α}\Gamma$ ,  $EZ$ , et

une hauteur égale à la perpendiculaire menée du point  $\Delta$  sur la droite  $BA$ , ou sur son prolongement. Je dis que le reste dont nous avons parlé est égal au cône  $\Theta KA$ .



Soient les deux cônes  $MNΞ$ ,  $ONP$ . Que la base du cône  $MNΞ$  soit égale à la surface du cône  $ABΓ$ , et que sa hauteur soit égale à la droite  $\Delta H$ : d'après ce que nous avons démontré (19), le cône  $MNΞ$  est égal au rhombe  $ABΓ\Delta$ . Que la base du cône  $ONP$  soit égale à la surface du cône  $EBZ$ , et sa hauteur égale à la droite  $\Delta H$ ; le cône  $ONP$  sera aussi égal au rhombe  $EBZ\Delta$  (19). Mais puisque la surface du cône  $ABΓ$  est composée de la surface du cône  $EBZ$ , et de la surface comprise entre  $EZ$ ,  $ΑΓ$ ; que la surface du cône  $AER$  est égale à la base du cône  $MNΞ$ ; que la surface du cône

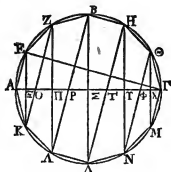
EBZ est égale à la base du cône ONP, et qu'enfin la surface comprise entre EZ, AF est égale à la base du cône OKA, la base du cône MNΞ sera égale à la somme des bases des cônes ONP, OKA. Mais ces cônes ont la même hauteur; donc le cône MNΞ est égal à la somme des cônes OKA, ONP. Mais le cône MNΞ est égal au rhombe ABΓΔ, et le cône ONP égal au rhombe EBZA; donc le cône restant OKA est égal à ce qui reste du rhombe ABΓΔ.

## PROPOSITION XXII.

Si l'on inscrit dans un cercle un polygone équilatère et d'un nombre pair de côtés; et si l'on joint les côtés de ce polygone par des droites parallèles à une des droites qui soutendent deux côtés de ce même polygone, la somme des droites qui joignent les côtés du polygone est au diamètre du cercle, comme la droite qui soutend la moitié des côtés du polygone inscrit moins un est à un côté de ce polygone.

Soit le cercle ABΓΔ; inscrivons-lui le polygone AEZBHΘΓMNΔAK; et menons les droites EK, ZA, BA, HN, ΘM. Il est évident que ces

droites seront parallèles à une de celles qui soutendent deux côtés de ce polygone. Je dis que la somme des droites dont nous avons parlé est au diamètre du cercle comme la droite  $TE$  est à la droite  $EA$ .



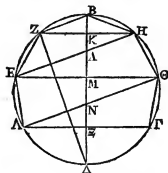
Menons les droites  $ZK$ ,  $\Lambda B$ ,  $H\Delta$ ,  $\Theta N$ . La droite  $ZK$  sera parallèle à la droite  $EA$ ; la droite  $\Lambda B$  parallèle à la droite  $ZK$ ; la droite  $H\Delta$  parallèle à la droite  $\Lambda B$ ; la droite  $\Theta N$  parallèle à  $H\Delta$ ; et enfin la droite  $\Gamma M$  parallèle à  $\Theta N$ . Puisque les deux droites  $EA$ ,  $KZ$  sont parallèles, et que l'on a mené les deux droites  $EK$ ,  $AO$ , la droite  $E\Xi$  est à la droite  $\Xi A$  comme la droite  $K\Xi$  est à la droite  $\Xi\Theta$ . Par la même raison, la droite  $K\Xi$  est à la droite  $\Xi O$  comme la droite  $Z\Pi$  est à la droite  $\Pi O$ ; la droite  $Z\Pi$  est à la droite  $\Pi O$  comme la droite  $\Lambda\Pi$  est à la droite  $\Pi P$ ; la droite  $\Lambda\Pi$  est à la droite  $\Pi P$

comme la droite  $B\Sigma$  est à la droite  $\Sigma P$ ; la droite  $B\Sigma$  est à la droite  $\Sigma P$  comme la droite  $\Delta\Sigma$  est à la droite  $\Sigma T$ ; la droite  $\Delta\Sigma$  est à la droite  $\Sigma T$  comme la droite  $HY$  est à la droite  $TY$ ; la droite  $HY$  est à la droite  $TY$  comme la droite  $NY$  est à la droite  $Y\Phi$ ; la droite  $NY$  est à la droite  $Y\Phi$  comme la droite  $\Theta X$  est à la droite  $X\Phi$ ; et enfin la droite  $\Theta X$  est à la droite  $X\Phi$  comme la droite  $MX$  est à la droite  $XT$ . Donc la somme de toutes les droites  $E\Xi$ ,  $\Xi K$ ,  $Z\P$ ,  $\Pi A$ ,  $B\Sigma$ ,  $\Sigma\Delta$ ,  $HY$ ,  $\Upsilon N$ ,  $\Theta X$ ,  $XM$ , est à la somme de toutes les droites  $A\Xi$ ,  $\Xi O$ ,  $O\P$ ,  $\Pi P$ ,  $P\Sigma$ ,  $\Sigma T$ ,  $T\Upsilon$ ,  $Y\Phi$ ,  $\Phi X$ ,  $X\Gamma$ , comme une de ces premières droites est à une des secondes. Donc la somme des droites  $EK$ ,  $ZA$ ,  $B\Delta$ ,  $HN$ ,  $\Theta M$  est au diamètre  $AT$  comme la droite  $E\Xi$  est à la droite  $\Xi A$ . Mais la droite  $E\Xi$  est à la droite  $\Xi A$  comme la droite  $TE$  est à la droite  $EA$ ; donc la somme des droites  $EK$ ,  $ZA$ ,  $B\Delta$ ,  $HN$ ,  $\Theta M$  est au diamètre  $AT$  comme la droite  $TE$  est à la droite  $EA$ .

## PROPOSITION XXIII

Si l'on inscrit dans un segment de cercle un polygone d'un nombre pair de côtés, dont tous les côtés, excepté la base, soient égaux entre eux; si l'on joint les côtés du polygone par des parallèles à la base du segment, la somme de ces parallèles, avec la moitié de la base du segment, est à la hauteur du segment, comme la droite menée de l'extrémité du diamètre à l'extrémité d'un des côtés du polygone est à un côté du polygone.

Conduisons dans le cercle ABR une droite



quelconque AR. Dans le segment ABR, et au-dessus de AR, inscrivons un polygone d'un nombre pair de côtés, dont tous les côtés,

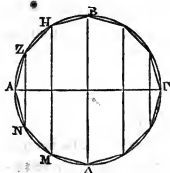


excepté la base  $AR$ , soient égaux; et menons les droites  $ZH$ ,  $E\Theta$  parallèles à la base du segment. Je dis que la somme des droites  $ZH$ ,  $E\Theta$ ,  $A\Xi$  est à la droite  $B\Xi$  comme la droite  $\Delta Z$  est au côté  $ZB$ .

Menons les droites  $HE$ ,  $A\Theta$ ; ces droites seront parallèles à la droite  $ZB$ . Par la même raison que dans le théorème précédent, la droite  $KZ$  est à la droite  $KB$  comme la droite  $HK$  est à la droite  $KA$ , comme  $EM$  est à  $MA$ , comme  $M\Theta$  est à  $MN$  et comme  $\Xi A$  est à  $\Xi N$ . Donc la somme des droites  $ZK$ ,  $KH$ ,  $EM$ ,  $M\Theta$ ,  $A\Xi$  est à la somme des droites  $BK$ ,  $KA$ ,  $AM$ ,  $MN$ ,  $N\Xi$ , comme une des premières droites est à une des secondes. Donc la somme des droites  $ZH$ ,  $E\Theta$ ,  $A\Xi$  est à la droite  $B\Xi$  comme la droite  $ZK$  est à la droite  $KB$ . Mais la droite  $ZK$  est à la droite  $KB$  comme la droite  $\Delta Z$  est à la droite  $ZB$ . Donc la somme des droites  $ZH$ ,  $E\Theta$ ,  $A\Xi$  est à la droite  $B\Xi$  comme la droite  $\Delta Z$  est à la droite  $ZB$ .

## PROPOSITION XXIV.

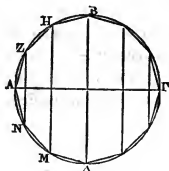
Que  $AB\Gamma\Delta$  soit un grand cercle d'une sphère; inscrivons dans ce cercle un polygone équilatère dont le nombre des côtés soit divisible par quatre ( $\alpha$ ). Soient  $A\Gamma$ ,  $B\Delta$  deux



diamètres ( $\epsilon$ ). Si le diamètre  $A\Gamma$  restant immobile, le cercle dans lequel le polygone est inscrit fait une révolution, il est évident que sa circonférence se mouvra selon la surface de la sphère, et que les sommets des angles, excepté ceux qui sont placés aux points  $A$ ,  $\Gamma$ , décriront dans la surface de la sphère des circonférences de cercles dont les plans seront perpendiculaires sur le cercle  $AB\Gamma\Delta$ . Les diamètres de ces cercles seront des droites qui étant parallèles à la droite  $B\Delta$ , joignent

les angles du polygone. Les côtés du polygone décriront les surfaces de certains cônes, savoir : les côtés  $AZ$ ,  $AN$  décriront la surface d'un cône dont la base est le cercle qui a pour diamètre la droite  $ZN$  et dont le sommet est le point  $A$  ; les côtés  $ZH$ ,  $MN$  décriront la surface d'un cône dont la base est le cercle qui a pour diamètre la droite  $MH$ , et dont le sommet est le point où les droites  $ZH$ ,  $MN$  prolongées se rencontrent avec la droite  $AR$  ; et enfin les côtés  $BH$ ,  $M\Delta$  décriront la surface du cône dont la base est le cercle qui a pour diamètre la droite  $B\Delta$ , et dont le sommet est le point où les droites  $BH$ ,  $\Delta M$  prolongées se rencontrent avec la droite  $AR$ . Pareillement dans l'autre demi-cercle, les côtés décriront aussi des surfaces de cônes semblables à celles dont nous venons de parler. De cette manière il sera inscrit dans la sphère une certaine figure qui sera comprise par les surfaces dont nous venons de parler, et dont la surface sera plus petite que la surface de la sphère. En effet, la sphère étant partagée en deux parties par un plan qui est mené par une droite  $B\Delta$ , et perpendiculaire sur le cercle  $AB\Gamma\Delta$ , la surface de l'un des hémisphères et

la surface de la figure inscrite ont les mêmes limites dans un seul plan, puisque ces deux surfaces ont pour limites la circonférence du cercle qui est décrite autour du diamètre  $B\Delta$ ,

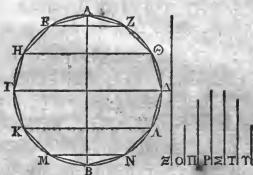


et qui est perpendiculaire sur le cercle  $AB\Gamma\Delta$ ; ces deux surfaces sont concaves du même côté, et l'une de ces surfaces est comprise par l'autre et par un plan qui a les mêmes limites que cette autre (*princ.* 4). Pareillement la surface de la figure qui est inscrite dans l'autre hémisphère, est aussi plus petite que la surface de cet hémisphère. Donc la surface totale de la figure inscrite dans la sphère est plus petite que la surface de la sphère.

## PROPOSITION XXV.

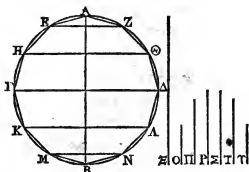
La surface de la figure inscrite dans une sphère est égale à un cercle dont le quarré du rayon est égal à la surface comprise sous le côté du polygone, et sous une droite égale à la somme des droites qui joignent les côtés du polygone, en formant des quadrilatères, et qui sont parallèles à une droite qui soutend deux côtés du polygone.

Que  $ATB\Delta$  soit un grand cercle de la sphère. Inscrivons dans ce cercle un polygone



équilatère dont le nombre des côtés soit divisible par quatre. Concevons qu'une figure ait été engendrée dans la sphère par le polygone inscrit. Menons les droites  $E\Lambda$ ,  $H\Theta$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $\kappa\Lambda$ ,  $MN$ , et que ces droites soient parallèles

à la droite qui soutend deux côtés du polygone. Supposons un cercle  $\kappa$  dont le carré du rayon soit égal à la surface comprise sous la droite  $AE$ , et sous une droite égale à la



somme des droites  $EZ$ ,  $H\Theta$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $\kappa\Lambda$ ,  $MN$ . Je dis que ce cercle est égal à la surface de la figure inscrite dans la sphère.

Supposons les cercles  $o$ ,  $\pi$ ,  $p$ ,  $\Sigma$ ,  $\tau$ ,  $\gamma$ . Que le carré du rayon du cercle  $o$  soit égal à la surface comprise sous  $EA$  et sous la moitié de  $EZ$ ; que le carré du rayon du cercle  $\pi$  soit égal à la surface comprise sous la droite  $EA$ , et sous la moitié de la somme des droites  $EZ$ ,  $H\Theta$ ; que le carré du rayon du cercle  $p$  soit égal à la surface comprise sous la droite  $EA$ , et sous la moitié de la somme des droites  $H\Theta$ ,  $\Gamma\Delta$ ; que le carré du rayon du cercle  $\Sigma$  soit égal à la surface

comprise sous la droite  $AE$ , et sous la moitié de la somme des droites  $\Gamma\Delta$ ,  $\kappa\Lambda$ ; que le quarré du rayon du cercle  $\tau$  soit égal à la surface comprise sous la droite  $AE$ , et sous la moitié de la somme des droites  $\kappa\Lambda$ ,  $MN$ , et qu'enfin le quarré du rayon du cercle  $\tau$  soit égal à la surface comprise sous la droite  $AE$ , et sous la moitié de la droite  $MN$ . Mais le cercle  $o$  est égal à la surface du cône  $AEZ$  (15); le cercle  $\pi$  égal à la surface comprise entre  $EZ$ ,  $H\Theta$  (17); le cercle  $p$  égal à la surface comprise entre  $H\Theta$ ,  $\Gamma\Delta$ ; le cercle  $\Sigma$  égal à la surface comprise entre  $\Delta\Gamma$ ,  $\kappa\Lambda$ ; le cercle  $\tau$  égal à la surface comprise entre  $\kappa\Lambda$ ,  $MN$ , et enfin le cercle  $\tau$  égal à la surface du cône  $MBN$ . Donc la somme de ces cercles est égale à la surface inscrite dans la sphère. Mais il est évident que la somme des quarrés des rayons des cercles  $o$ ,  $\pi$ ,  $p$ ,  $\Sigma$ ,  $\tau$ ,  $\tau$  est égale à la surface comprise sous  $AE$ , et sous la somme des demi-droites  $EZ$ ,  $H\Theta$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $\kappa\Lambda$ ,  $MN$ , prises deux fois, c'est-à-dire la somme des droites totales  $EZ$ ,  $H\Theta$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $\kappa\Lambda$ ,  $MN$ . Donc la somme des quarrés des rayons des cercles  $o$ ,  $\pi$ ,  $p$ ,  $\Sigma$ ,  $\tau$ ,  $\tau$  est égale à la surface comprise sous  $AE$ , et sous la somme

des droites  $EZ$ ,  $H\Theta$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $\text{ΚΛ}$ ,  $MN$ . Mais le carré du rayon du cercle  $\varepsilon$  est égal à la surface comprise sous la droite  $AE$ , et sous une droite composée de toutes les droites  $EZ$ ,  $H\Theta$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $\text{ΚΛ}$ ,  $MN$ . Donc le carré du rayon du cercle  $\varepsilon$  est égal à la somme des carrés des rayons de tous les cercles  $o$ ,  $\pi$ ,  $p$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $\gamma$ . Donc le cercle  $\varepsilon$  est égal à la somme des cercles  $o$ ,  $\pi$ ,  $p$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $\gamma$  ( $\sigma$ ). Mais l'on a démontré que la somme des cercles  $o$ ,  $\pi$ ,  $p$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $\gamma$  est égale à la surface de la figure dont nous avons parlé. Donc le cercle  $\varepsilon$  est aussi égal à la surface de cette figure.

### PROPOSITION XXVI.

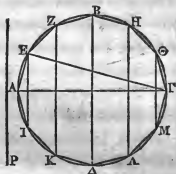
La surface d'une figure inscrite dans une sphère et terminée par des surfaces coniques, est plus petite que quatre grands cercles de la sphère.

Soit  $AB\Gamma\Delta$  un grand cercle d'une sphère. Inscrivons dans ce cercle un polygone équiangle et équilatère, dont le nombre des côtés soit divisible par quatre. Concevons que sur ce polygone on ait construit une figure terminée par des surfaces coniques. Je dis que



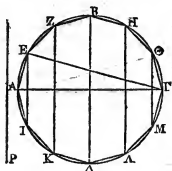
la surface de la figure inscrite est plus petite que quatre grands cercles de cette sphère.

Menons les deux droites  $EI$ ,  $\Theta M$ , soutenant chacune deux côtés du polygone, et



les droites  $ZK$ ,  $\Delta B$ ,  $HA$  parallèles aux droites  $EI$ ,  $\Theta M$ . Supposons un cercle  $P$  dont le carré du rayon soit égal à la surface comprise sous la droite  $EA$ , et sous une droite égale à la somme des droites  $EI$ ,  $ZK$ ,  $B\Delta$ ,  $HA$ ,  $\Theta M$ . D'après ce qui a été démontré (25), ce cercle est égal à la surface de la figure dont nous venons de parler. Mais l'on a démontré qu'une droite égale à la somme des droites  $EI$ ,  $ZK$ ,  $B\Delta$ ,  $HA$ ,  $\Theta M$ , est au diamètre  $AT$  du cercle  $ABT\Delta$  comme  $TE$  est à  $EA$  (22). Donc la surface comprise sous une droite égale à la somme des droites dont nous venons de parler, et sous la droite  $EA$ , c'est-à-dire le

quarré du rayon du cercle  $P$ , est égal à la surface comprise sous les droites  $AT$ ,  $TE$ . Mais la surface comprise sous  $AT$ ,  $TE$  est plus petite que le quarré de  $AT$ ; donc le quarré du rayon



du cercle  $P$  est plus petit que le quarré de  $AT$ . Donc le rayon du cercle  $P$  est plus petit que  $AT$ . Donc le diamètre du cercle  $P$  est plus petit que le double du diamètre du cercle  $AB\Gamma\Delta$ . Donc deux diamètres du cercle  $AB\Gamma\Delta$  sont plus grands que le diamètre du cercle  $P$ . Donc le quadruple du quarré construit sur le diamètre du cercle  $AB\Gamma\Delta$ , c'est-à-dire sur  $AT$ , est plus grand que le quarré construit sur le rayon du cercle  $P$ . Mais le quadruple du quarré construit sur  $AT$  est au quarré construit sur le diamètre du cercle  $P$ , comme le quadruple du cercle  $AB\Gamma\Delta$  est au cercle  $P$ . Donc le quadruple du cercle  $AB\Gamma\Delta$  est plus

grand que le cercle  $p$ . Donc le cercle  $p$  est plus petit que le quadruple d'un grand cercle. Mais on a démontré que le cercle  $p$  est égal à la surface de la figure dont nous venons de parler (25); donc la surface de la figure dont nous venons de parler est plus petite que le quadruple d'un grand cercle de la sphère.

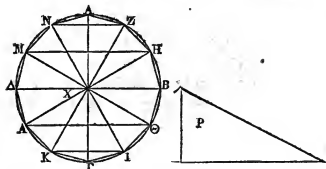
### PROPOSITION XXVII.

Une figure inscrite dans la sphère et terminée par des surfaces coniques, est égale à un cône qui a une base égale à la surface de la figure inscrite dans la sphère, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du centre de la sphère sur le côté du polygone.

Soit une sphère; que  $AB\Gamma\Delta$  soit un grand cercle de cette sphère, et que le reste soit comme dans le théorème précédent. Que  $p$  soit un cône droit, qui ait une base égale à la surface de la figure inscrite dans cette sphère, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du centre de cette sphère sur le côté du polygone. Il faut démontrer

que la figure inscrite dans cette sphère est égale au cône P.

Sur les cercles décrits autour des diamètres  $ZN$ ,  $HM$ ,  $\Theta A$ ,  $IK$ , construisons des



cônes qui aient leur sommet au centre de la sphère. On aura un rhombe solide composé du cône dont la base est le cercle décrit autour du diamètre  $ZN$ , et dont le sommet est le point  $A$ ; et du cône dont la base est le même cercle et dont le sommet est le point  $x$ . Ce rhombe est égal à un cône qui a une base égale à la surface du cône  $NAZ$ , et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du point  $x$  sur la droite  $AZ$  (19). Le reste du rhombe terminé par la surface conique placée entre les plans parallèles conduits par les droites  $ZN$ ,  $HM$ , et entre les surfaces des cônes  $ZNx$ ,  $HMx$ , est égal à un cône qui a une base

égale à la surface conique comprise entre les plans parallèles conduits par les droites  $ZN$ ,  $HM$ , et pour hauteur une droite égale à la perpendiculaire menée du point  $x$  sur la droite  $ZH$ , ainsi que cela a été démontré (21). De plus le reste de cône terminé par la surface conique comprise entre les plans parallèles menés par les droites  $HM$ ,  $B\Delta$ , entre la surface du cône  $HMX$  et entre le cercle décrit autour du diamètre  $B\Delta$ , est égal à un cône qui a une base égale à la surface conique comprise entre les plans parallèles menés par les droites  $HM$ ,  $B\Delta$ , et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du point  $x$  sur la droite  $BH$  (20). Dans l'autre hémisphère, on aura pareillement un rhombe  $XKTI$ , et autant de restes de cônes que dans le premier hémisphère; et ce rhombe et ces restes de cônes seront égaux, chacun à chacun, aux cônes dont nous venons de parler. Il est donc évident que la figure totale inscrite dans la sphère est égale à la somme de tous les cônes dont nous venons de parler. Mais la somme de ces cônes est égale au cône  $P$ , parce que le cône  $P$  a une hauteur égale à la hauteur de chacun des cônes

dont nous venons de parler, et une base égale à la somme de leurs bases. Il est donc évident que la figure inscrite dans la sphère est égale au cône P.

### PROPOSITION XXVIII.

Une figure inscrite dans une sphère et terminée par des surfaces coniques, est plus petite que le quadruple d'un cône qui a une base égale à un grand cercle de cette sphère, et une hauteur égale à un rayon de cette même sphère.

En effet, que P soit un cône égal à la

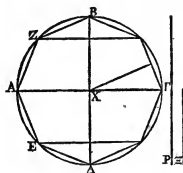


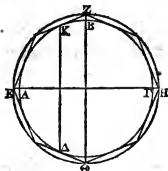
figure inscrite; c'est-à-dire que ce cône ait une base égale à la surface de la figure inscrite et une hauteur égale à la droite menée du centre du cercle sur un des côtés du

polygone inscrit. Soit aussi un cône  $\varepsilon$ , qui ait une base égale au cercle  $AB\Gamma\Delta$  et une hauteur égale au rayon du cercle  $AB\Gamma\Delta$ .

Puisque le cône  $p$  a une base égale à la surface de la figure inscrite dans la sphère et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du point  $x$  sur le côté  $Az$ , et puisqu'il a été démontré que la surface de la figure inscrite est plus petite que le quadruple d'un grand cercle d'une sphère (26), la base du cône  $p$  est plus petite que le quadruple de la base du cône  $\varepsilon$ . Mais la hauteur du cône  $p$  est plus petite que la hauteur du cône  $\varepsilon$ ; donc, puisque le cône  $p$  a une base plus petite que le quadruple de la base du cône  $\varepsilon$ , et une hauteur plus petite que celle du cône  $\varepsilon$ , il est évident que le cône  $p$  est plus petit que le quadruple du cône  $\varepsilon$ . Mais le cône  $p$  est égal à la figure inscrite (27); donc la figure inscrite est plus petite que le quadruple du cône  $\varepsilon$ .

## PROPOSITION XXIX.

Que  $AB\Gamma\Delta$  soit un grand cercle d'une sphère. Circonscrivons à ce cercle un polygone équiangle et équilatère; que le nombre

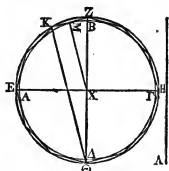


des côtés de ce polygone soit divisible par quatre. Circonscrivons un cercle au polygone circonscrit. Le centre du cercle circonscrit sera le même que le centre du cercle  $AB\Gamma\Delta$ . Si le diamètre  $EH$  restant immobile, le plan du polygone  $EZH\Theta$  et le cercle  $AB\Gamma\Delta$  font une révolution, il est évident que la circonférence du cercle  $AB\Gamma\Delta$  se mouvra selon la surface de la sphère, et que la circonférence du cercle  $EZH\Theta$  décrira la surface d'une autre sphère qui aura le même centre que la plus petite. Les points de contact des



côtés du polygone décriront dans la surface de la plus petite sphère des cercles perpendiculaires sur le cercle  $AB\Gamma\Delta$  ; les angles du polygone, excepté les angles placés aux points  $E, H$ , décriront des circonférences de cercle dans la surface de la plus grande sphère, dont les plans seront perpendiculaires sur le cercle  $EZH\Theta$  ; et les côtés du polygone décriront des surfaces coniques comme dans le théorème précédent. Il est donc évident qu'une figure terminée par des surfaces coniques sera circonscrite à la petite sphère et inscrite dans la grande. Nous démontrerons de la manière suivante, que la surface de la figure circonscrite est plus grande que la surface de la sphère. Que  $K\Delta$  soit le diamètre d'un des cercles de la petite sphère, et  $K, \Delta$  les points où deux côtés du polygone circonscrit touchent le cercle  $AB\Gamma\Delta$ . La sphère étant partagée en deux parties par un plan conduit par la droite  $K\Delta$  et perpendiculaire sur le cercle  $AB\Gamma\Delta$ , la surface de la figure circonscrite à la sphère sera aussi partagée en deux parties par le même plan. Or il est évident que les surfaces obtenues de cette manière ont les mêmes limites dans un

même plan , car la limite de l'une et de l'autre est la circonférence du cercle qui est décrit autour du diamètre  $K\Delta$  et qui est perpendiculaire sur le cercle  $AB\Gamma\Delta$  ; et de



plus l'une et l'autre de ces surfaces sont concaves du même côté, et l'une est comprise par l'autre et par un plan qui a les mêmes limites que cette autre (*princ. 4*). Donc la surface du segment sphérique qui est comprise est plus petite que la surface de la figure circonscrite à ce même segment. Semblablement, la surface de l'autre segment sphérique est aussi plus petite que la surface de la figure circonscrite à ce même segment. Il est donc évident que la surface totale d'une sphère est plus petite que la surface de la figure circonscrite à cette sphère.

## PROPOSITION XXX.

La surface d'une figure circonscrite à une sphère est égale à un cercle dont le quarré du rayon est égal à la surface comprise sous un des côtés du polygone, et sous une droite égale à la somme des droites qui joignent les angles du polygone et qui sont parallèles à une de celles qui soutendent deux côtés du polygone.

En effet, la figure circonscrite à la petite sphère est inscrite dans la grande. Mais on a démontré que la surface de la figure inscrite dans la sphère et terminée par des surfaces coniques est égale à un cercle dont le quarré du rayon est égal à la surface comprise sous le côté du polygone et sous une droite égale à la somme des droites qui joignent les angles du polygone et qui sont parallèles à une des droites qui soutendent deux côtés du polygone (25). Donc ce qui a été proposé plus haut est évident.

## PROPOSITION XXXI

La surface de la figure circonscrite à une sphère est plus grande que le quadruple d'un grand cercle de cette sphère.

Soient une sphère et un grand cercle , et



que le reste soit comme dans les théorèmes précédens. Que le cercle  $\Lambda$  soit égal à la surface de la figure proposée qui est circonscrite à la petite sphère.

Puisqu'on a inscrit dans le cercle  $EZH\Theta$  un polygone équilatère dont le nombre des angles est pair , la somme des parallèles au diamètre  $e\zeta$  , qui joignent les angles du polygone est à  $e\zeta$  comme  $k\Theta$  est à  $k\zeta$ . Donc la surface comprise sous un côté du polygone et sous une droite égale à la somme des

droites qui joignent les angles du polygone , est égale à la surface comprise sous  $z\theta$  ,  $\theta\kappa$ . Donc le quarré du rayon du cercle  $\Lambda$  est égal à la surface comprise sous  $z\theta$  ,  $\theta\kappa$  (25). Donc le rayon du cercle  $\Lambda$  est plus grand que  $\theta\kappa$ . Mais la droite  $\theta\kappa$  est égale au diamètre du cercle  $AB\Gamma\Delta$  ( $\alpha$ ) , puisque  $\theta\kappa$  est double de  $xz$  qui est le rayon du cercle  $AB\Gamma\Delta$ . Il est donc évident que le cercle  $\Lambda$  , c'est-à-dire la surface de la figure circonscrite à une sphère , est plus grand que le quadruple d'un grand cercle de cette sphère.

## PROPOSITION XXXII.

La figure circonscrite à la petite sphère est égale à un cône qui a pour base un cercle égal à la surface de cette figure , et pour hauteur une droite égale au rayon de cette sphère.

En effet , la figure circonscrite à la petite sphère est inscrite dans la plus grande. Or on a démontré qu'une figure inscrite et terminée par des surfaces coniques est égale à un cône qui a pour base un cercle égal à la surface de cette figure , et pour hauteur une

droite égale à la perpendiculaire menée du centre de la sphère sur le côté du polygone; et cette perpendiculaire est égale au rayon de la petite sphère (27). Donc ce qui a été posé plus haut est évident.

### PROPOSITION XXXIII.

Il suit de-là que la figure circonscrite à la petite sphère est plus grande que le quadruple d'un cône qui a pour base un cercle égal à un grand cercle de cette sphère, et pour hauteur une droite égale au rayon de cette même sphère.

En effet, puisque cette figure est égale à un cône qui a une base égale à la surface de cette même figure, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du centre sur le côté du polygone, c'est-à-dire au rayon de la petite sphère (32), et que la surface de la figure circonscrite à une sphère est plus grande que quatre grands cercles (31), la figure circonscrite à la petite sphère est plus grande que le quadruple d'un cône qui a pour base un grand cercle de cette sphère, et pour hauteur un rayon de cette même

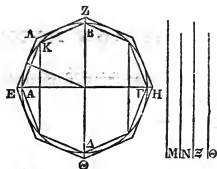
sphère; car cette figure est égale à un cône plus grand que le quadruple du cône dont nous venons de parler, puisque le premier a une base plus grande que le quadruple de la base du second et une hauteur égale.

## PROPOSITION XXXIV.

Si l'on inscrit une figure dans une sphère, et si on lui en circonscrit une autre; et si l'on fait faire une révolution aux polygones semblables qui ont été construits plus haut, la raison de la surface de la figure circonscrite à la surface de la figure inscrite, sera doublée de la raison du côté du polygone qui est circonscrit à un grand cercle à un des côtés du polygone qui est inscrit dans ce même cercle; et la raison de la figure circonscrite à la figure inscrite sera triplée de la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit.

Que  $AB\Gamma\Delta$  soit un grand cercle d'une sphère; inscrivons dans ce cercle un polygone équilatère dont le nombre des côtés soit divisible par quatre. Circonscrivons à ce même cercle un autre polygone semblable

au premier; que les côtés du polygone circonscrit soient tangents aux milieux des arcs soutendus par les côtés du polygone inscrit; que les droites  $EH$ ,  $\Theta Z$  soient deux



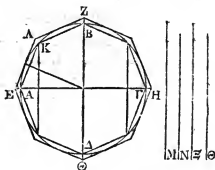
diamètres du cercle qui comprend le polygone circonscrit; que ces diamètres se coupent à angles droits et soient placés de la même manière que les diamètres  $AG$ ,  $BD$ ; et concevons qu'on ait joint les angles opposés du polygone par des droites; ces droites seront parallèles entre elles et aux droites  $BZ$ ,  $\Theta A$ . Cela posé, le diamètre  $EH$  restant immobile, si l'on fait faire une révolution aux polygones, les côtés de ces polygones circonscriront une figure à la sphère et lui en inscriront une autre. Il faut démontrer que la raison de la surface de la figure cir-



conscrite à la surface de la figure inscrite est doublée de la raison de  $EA$  à  $AK$  ; et que la raison de la figure circonscrite à la figure inscrite est triplée de la raison de  $EA$  à  $AK$ .

Que  $M$  soit un cercle égal à la surface de la figure circonscrite à la sphère, et  $N$  un cercle égal à la surface de la figure inscrite. Le quarré du rayon du cercle  $M$  est égal à la surface comprise sous la droite  $EA$  et sous une droite égale à la somme des droites qui joignent les angles du polygone circonscrit (30); et le quarré du rayon du cercle  $N$  est égal à la surface comprise sous la droite  $AK$  et sous une droite égale à la somme des droites qui joignent les angles du polygone inscrit (25). Mais les polygones circonscrits et inscrits sont semblables ; il est donc évident que les surfaces comprises sous les droites dont nous venons de parler , c'est-à-dire les surfaces comprises sous les sommes des droites qui joignent les angles des polygones et sous les côtés de ces mêmes polygones , sont des figures semblables entre elles ( $\alpha$ ). Donc ces figures sont entre elles comme les quarrés des côtés des polygones. Mais les surfaces qui sont comprises sous les

droites dont nous venons de parler, sont entre elles comme les quarrés des rayons des cercles  $M$ ,  $N$ . Donc les diamètres des cercles  $M$ ,  $N$  sont entre eux comme les côtés



des polygones. Mais les cercles  $M$ ,  $N$  sont entre eux en raison doublée de leurs diamètres; et ces cercles sont égaux aux surfaces des figures circonscrites et inscrites. Il est donc évident que la raison de la surface de la figure qui est circonscrite à la sphère à la surface de la figure inscrite est doublée de la raison du côté  $EA$  au côté  $AK$ .

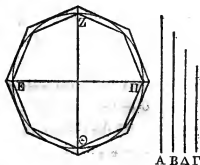
Soient maintenant deux cônes  $O$ ,  $\Sigma$ . Que le cône  $\Sigma$  ait une base égale au cercle  $M$ , et le cône  $O$  une base égale au cercle  $N$ ; que le cône  $\Sigma$  ait une hauteur égale au rayon de la sphère, et que le cône  $O$  ait une hauteur

égale à la perpendiculaire menée du centre de la sphère sur le côté  $AK$ . D'après ce qui a été démontré, le cône  $\pi$  est égal à la figure circonscrite (32), et le cône  $\sigma$  égal à la figure inscrite (27). Mais les polygones sont semblables ; donc le côté  $EA$  est au côté  $AK$  comme le rayon de la sphère est à la perpendiculaire menée du centre de la sphère sur le côté  $AK$ . Donc la hauteur du cône  $\pi$  est à la hauteur du cône  $\sigma$  comme  $EA$  est à  $AK$ . Mais le diamètre du cercle  $M$  est au diamètre du cercle  $N$  comme  $EA$  est à  $AK$  ; donc les diamètres des bases des cônes  $\pi$ ,  $\sigma$  sont proportionnels à leurs hauteurs ; donc ces cônes sont semblables. Donc les cônes  $\pi$ ,  $\sigma$  sont entre eux en raison triplée des diamètres des cercles  $M$ ,  $N$ . Il est donc évident que la raison de la figure circonscrite à la figure inscrite est triplée de la raison du côté  $EA$  au côté  $AK$ .

## PROPOSITION XXXV.

La surface d'une sphère quelconque est quadruple d'un de ses grands cercles.

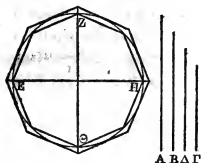
Soit une sphère quelconque; que A soit un cercle quadruple d'un des grands cercles de cette sphère. Je dis que le cercle A est égal à la surface de cette sphère.



Car, si le cercle A n'est pas égal à la surface de la sphère, il est ou plus grand ou plus petit. Supposons d'abord que la surface de la sphère soit plus grande que le cercle A. Puisqu'on a deux quantités inégales, la surface de la sphère et le cercle A, on peut prendre deux droites inégales de manière que la raison de la plus grande à la plus

petite soit moindre que la raison de la surface de la sphère au cercle A (3). Prenons les droites B, r, et que la droite  $\Delta$  soit moyenne proportionnelle entre les droites B, r. Concevons que la sphère soit coupée par un plan conduit par son centre, selon le cercle EZHΘ. Inscrivons un polygone dans ce cercle, et circonscrivons-lui en un autre de manière que le polygone circonscrit soit semblable au polygone inscrit; et que la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que la raison de la droite B à la droite  $\Delta$  (4). Il est évident que la raison doublée du côté du premier polygone au côté du second polygone sera encore moindre que la raison doublée de la droite B à la droite  $\Delta$ . Mais la raison de B à r est doublée de la raison de B à  $\Delta$ , et la raison de la surface du solide circonscrit à la sphère à la surface du solide inscrit est doublée de la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit (34). Donc la raison de la surface de la figure qui est circonscrite à la sphère à la surface de la figure inscrite est moindre que la raison de la surface de la sphère au

cercle A ( $\alpha$ ), ce qui est absurde. En effet, la surface de la figure circonscrite est plus grande que la surface de la sphère, et la surface de la figure inscrite est au contraire



plus petite que celle du cercle A; car on a démontré que la surface de la figure inscrite est plus petite que quatre grands cercles d'une sphère (26), et par conséquent plus petite que le cercle A qui est égal à quatre grands cercles. Donc la surface d'une sphère n'est pas plus grande que le cercle A.

Je dis maintenant que la surface de la sphère n'est pas plus petite que le cercle A. Supposons, si cela est possible, qu'elle soit plus petite. Cherchons pareillement deux droites B, r, de manière que la raison de B à r soit moindre que la raison du cercle A

à la surface de la sphère (3), et que la droite  $\Delta$  soit moyenne proportionnelle entre  $B$ ,  $\Gamma$ . Inscrivons dans le cercle  $E\Theta HZ$  un polygone et circonscrivons-lui un autre polygone, de manière que la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que la raison de  $B$  à  $\Delta$  (4). La raison doublée du côté du polygone circonscrit à un côté du polygone inscrit sera encore moindre que la raison doublée de  $B$  à  $\Delta$ . Donc la raison de la surface de la figure circonscrite à la surface de la figure inscrite est moindre que la raison du cercle  $A$  à la surface de la sphère, ce qui est absurde. En effet, la surface de la figure circonscrite est plus grande que le cercle  $A$  (31), tandis que la surface de la figure inscrite est plus petite que la surface de la sphère. Donc la surface d'une sphère n'est pas plus petite que le cercle  $A$ . Mais nous avons démontré qu'elle n'est pas plus grande. Donc la surface d'une sphère est égale au cercle  $A$ , c'est-à-dire à quatre grands cercles.

## PROPOSITION XXXVI.

Une sphère quelconque est quadruple d'un cône qui a une base égale à un grand cercle de cette sphère et une hauteur égale au rayon de cette même sphère.

Soit une sphère quelconque ; et que  $AB\Gamma\Delta$  soit un de ses grands cercles. Que cette sphère



ne soit pas le quadruple du cône dont nous venons de parler ; et supposons, si cela est possible, qu'elle soit plus grande que le quadruple de ce cône. Soit  $\varepsilon$  un cône qui ait une base quadruple du cercle  $AB\Gamma\Delta$ , et une hauteur égale au rayon de la sphère ; la sphère sera plus grande que le cône  $\varepsilon$ . Nous aurons donc deux quantités inégales, la sphère et ce cône. Nous pourrons donc prendre deux droites telles que la raison de la plus grande à la plus petite soit moindre



que la raison de la sphère au cône  $\pi$  (5). Que ces droites soient  $\kappa$ ,  $h$ . Prenons deux autres droites, de manière que  $\kappa$  surpasse 1 de la même quantité que 1 surpasse  $\theta$ , et que  $\theta$  surpasse  $h$ . Concevons que l'on ait inscrit dans le cercle  $AB\Gamma\Delta$  un polygone dont le nombre des côtés soit divisible par quatre, et qu'on ait circonscrit à ce même cercle un polygone semblable au polygone inscrit, comme dans les théorèmes précédens. Que la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que la raison de  $\kappa$  à 1 (4); et que les diamètres  $AR$ ,  $B\Delta$  se coupent entre eux à angles droits. Si le diamètre  $AR$  restant immobile, on fait faire une révolution au plan des polygones, on inscrira une figure dans la sphère et on lui en circonscrira une autre; et la raison de la figure circonscrite à la figure inscrite sera triplée de la raison du côté du polygone qui est circonscrit au cercle  $AB\Gamma\Delta$  au côté du polygone qui lui est inscrit. Mais la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit est moindre que la raison de  $\kappa$  à 1; donc la raison de la figure circonscrite à la figure inscrite est moindre que

la raison triplée de  $\kappa$  à 1. Mais la raison de  $\kappa$  à  $H$  est plus grande que la raison triplée de  $\kappa$  à 1; car cela suit évidemment des lemmes ( $\alpha$ ). Donc la raison de la figure circon-



scrite à la figure inscrite est encore moindre que la raison de  $\kappa$  à  $H$ . Mais la raison de  $\kappa$  à  $H$  est moindre que la raison de la sphère au cône  $\pi$  et par permutation. . . . . (6) ce qui ne peut être. En effet, la figure circonscrite est plus grande que la sphère, et la figure inscrite est plus petite que le cône  $\pi$ , à cause que le cône  $\pi$  est quadruple d'un cône qui a une base égale au cercle  $AB\Gamma\Delta$ , et une hauteur égale au rayon de la sphère. Mais la figure inscrite est moindre que le quadruple du cône dont nous venons de parler (28). Donc la sphère n'est pas plus grande que le quadruple du cône dont nous venons de parler.

Supposons, si cela est possible, que la

sphère soit plus petite que le quadruple du cône dont nous avons parlé. Prenons les droites  $\kappa$ ,  $\eta$ , de manière que la droite  $\kappa$  étant plus grande que la droite  $\eta$ , la raison de  $\kappa$  à  $\eta$  soit moindre que la raison du cône  $\pi$  à la sphère. Soient encore les deux droites  $\theta$ ,  $\iota$ , comme dans la première partie du théorème. Concevons que l'on ait inscrit un polygone dans le cercle  $AB\Gamma\Delta$  et qu'on lui en ait circonscrit un autre, de manière que la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que la raison de  $\kappa$  à  $\iota$  (4). Que le reste soit construit de la même manière qu'on l'a fait plus haut. La raison de la figure solide circonscrite à la figure inscrite sera triplée de la raison du côté du polygone circonscrit au cercle  $AB\Gamma\Delta$  au côté du polygone inscrit dans ce même cercle. Mais la raison du côté du premier polygone au côté du second polygone est moindre que la raison de  $\kappa$  à  $\iota$ ; donc la raison de la figure circonscrite à la figure inscrite est moindre que la raison triplée de  $\kappa$  à  $\iota$ . Mais la raison de  $\kappa$  à  $\eta$  est plus grande que la raison triplée de  $\kappa$  à  $\iota$ ; donc la raison de la figure circonscrite à la figure

inscrite est moindre que la raison de  $\kappa$  à  $h$ . Mais la raison de  $\kappa$  à  $h$  est moindre que la raison du cône  $\pi$  à la sphère ( $\alpha$ ), ce qui est impossible. Car la figure inscrite est plus petite que la sphère, tandis que la figure circonscrite est plus grande que le cône  $\pi$  (33). Donc la sphère n'est pas plus petite que le quadruple du cône qui a une base égale au cercle  $AB\Gamma\Delta$ , et une hauteur égale au rayon de la sphère. Mais on a démontré que la sphère n'est pas plus grande; donc la sphère est quadruple de ce cône.

### PROPOSITION XXXVII.

Ces choses étant démontrées, il est évident que tout cylindre qui a une base égale à un grand cercle d'une sphère et une hauteur égale au diamètre de cette sphère, est égal à trois fois la moitié de cette sphère, et que la surface de ce cylindre, les bases étant comprises, est aussi égale à trois fois la moitié de la surface de cette même sphère.

Car le cylindre dont nous venons de parler est le sextuple d'un cône qui a la même base que ce cylindre et une hauteur égale

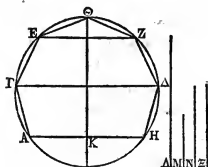
au rayon de la sphère. Mais la sphère est le quadruple de ce cône; il est donc évident que le cylindre est égal à trois fois la moitié de la sphère.

De plus, puisque l'on a démontré que la surface d'un cylindre, les bases exceptées, est égale à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cylindre et le diamètre de sa base (14), et que le côté du cylindre dont nous venons de parler est égal au diamètre de sa base, à cause que ce cylindre est circonscrit à une sphère; il est évident que cette moyenne proportionnelle est égale au diamètre de la base. Mais le cercle qui a un rayon égal au diamètre de la base du cylindre est le quadruple de la base du cylindre, c'est-à-dire le quadruple d'un grand cercle de la sphère; donc la surface du cylindre, ses bases exceptées, est le quadruple d'un grand cercle de la sphère. Donc la surface totale du cylindre, avec les bases, est le sextuple d'un grand cercle. Mais la surface de la sphère est le quadruple d'un grand cercle; donc la surface totale du cylindre est égale à trois fois la moitié de la surface de la sphère.

## PROPOSITION XXXVIII.

La surface d'une figure inscrite dans un segment sphérique est égale à un cercle dont le carré du rayon est égal à la surface comprise sous le côté du polygone inscrit dans le segment d'un grand cercle, et sous la somme des droites parallèles à la base du segment, réunie avec la moitié de la base du segment.

Soit une sphère, et dans cette sphère un segment qui ait pour base le cercle décrit

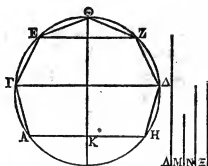


autour du diamètre AH. Inscrivons dans ce segment une figure terminée par des surfaces coniques ainsi que nous l'avons dit. Que  $AH\Theta$  soit un grand cercle, et  $A\Gamma E\Theta Z\Delta H$  un polygone dont les côtés, excepté le côté AH,

soient pairs en nombre. Prenons un cercle  $\Lambda$  dont le quarré du rayon soit égal à la surface comprise sous le côté  $AT$  et sous la somme des droites  $EZ$ ,  $\Gamma\Delta$ , réunie avec la moitié de la base, c'est-à-dire  $AK$ . Il faut démontrer que le cercle  $\Lambda$  est égal à la surface de la figure inscrite.

Prenons un cercle  $M$  dont le quarré du rayon soit égal à la surface comprise sous le côté  $E\Theta$  et sous la moitié de  $EZ$ ; ce cercle sera égal à la surface du cône, dont la base est le cercle décrit autour du diamètre  $EZ$ , et dont le sommet est le point  $\Theta$  (15). Prenons un autre cercle  $N$  dont le quarré du rayon soit égal à la surface comprise sous  $ET$ , et sous la moitié de la somme des droites  $EZ$ ,  $\Gamma\Delta$  (17); ce cercle sera égal à la surface du cône comprise entre les plans parallèles conduits par les droites  $EZ$ ,  $\Gamma\Delta$ . Prenons semblablement un autre cercle  $\kappa$  dont le quarré du rayon soit égal à la surface comprise sous  $AT$  et sous la moitié de la somme des droites  $\Gamma\Delta$ ,  $AH$ . Ce cercle sera aussi égal à la surface du cône comprise entre les plans parallèles conduits par les droites  $AH$ ,  $\Gamma\Delta$ . La somme de ces cercles sera donc égale à la sur-

face totale de la figure inscrite dans le segment; et la somme des quarrés de leurs rayons sera égale à la surface comprise sous un côté  $AR$  et sous la somme des droites  $EZ$ ,



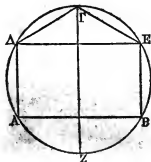
$\Gamma\Delta$ , réunie avec la moitié de la base  $AK$ . Mais le quarré du rayon  $\Lambda$  étoit aussi égal à cette surface; donc le cercle  $\Lambda$  est égal à la somme des cercles  $M$ ,  $N$ ,  $\Xi$ . Donc le cercle  $\Lambda$  est égal à la surface de la figure inscrite dans le segment.

### PROPOSITION XXXIX.

Qu'une sphère soit coupée par un plan qui ne passe pas par son centre; et que  $A\Gamma Z$  soit un grand cercle de cette sphère, perpendiculaire sur le plan qui le coupe. Inscrivons dans le segment  $AB\Gamma$  un polygone



dont les côtés, excepté la base  $AB$ , soient égaux et pairs en nombre. Si, comme dans les théorèmes précédens, le diamètre  $rz$  restant immobile, on fait faire une révolution



au polygone, les angles  $\Delta$ ,  $E$ ,  $A$ ,  $B$  décriront les circonférences des cercles, dont les diamètres sont  $\Delta E$ ,  $AB$ ; et les côtés du polygone décriront des surfaces coniques. De cette manière il sera produit une figure solide terminée par des surfaces coniques, ayant pour base le cercle décrit autour du diamètre  $AB$  et pour sommet le point  $r$ . Cette figure, ainsi que dans les théorèmes précédens, aura une surface plus petite que la surface du segment dans lequel cette figure est comprise, parce que la circonférence du cercle décrit autour du diamètre  $AB$  est la



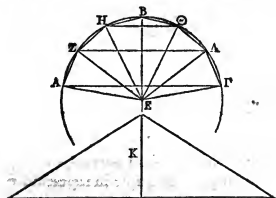
Dans le segment du cercle décrivons un polygone, et faisons le reste comme nous l'avons fait plus haut. Menons le diamètre de la sphère  $\Lambda\Theta$ , et les droites  $\Lambda E$ ,  $\Theta A$ . Soit  $M$  un cercle qui ait un rayon égal à la droite  $\Lambda\Theta$ . Il faut démontrer que le cercle  $M$  est plus grand que la surface de la figure inscrite.

En effet, nous avons démontré que la surface de la figure inscrite est égale à un cercle dont le quarré du rayon est égal à la surface comprise sous  $E\Theta$ , et sous la somme des droites  $EZ$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $KA$  (38). Nous avons encore démontré que la surface comprise sous  $E\Theta$  et sous la somme des droites  $EZ$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $KA$  est égale à la surface comprise sous les droites  $EA$ ,  $K\Theta$  (23). Mais la surface comprise sous  $EA$ ,  $K\Theta$ , est plus petite que le quarré construit sur  $\Lambda\Theta$ , parce que la surface comprise sous  $\Lambda\Theta$ ,  $\Theta K$  est égale au quarré construit sur  $\Lambda\Theta$ . Il est donc évident que le rayon du cercle qui est égal à la surface de la figure inscrite est plus petit que le rayon du cercle  $M$ ; d'où il suit que le cercle  $M$  est plus grand que la surface de la figure inscrite.

## PROPOSITION XLI.

La figure inscrite dans un segment et terminée par des surfaces coniques, avec le cône qui a la même base que la figure inscrite, et qui a son sommet au centre de la sphère, est égale à un cône qui a une base égale à la surface de la figure inscrite, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du centre de la sphère sur le côté du polygone.

Soient une sphère et un grand cercle de cette sphère. Que  $AB\Gamma$  soit un segment plus



petit que le demi-cercle. Que le point  $E$  soit le centre. Dans le segment  $AB\Gamma$  inscrivons, comme dans les théorèmes précédens, un

polygone dont les côtés, excepté le côté  $AR$ , soient égaux entre eux. Si  $BE$  restant immobile, on fait faire une révolution à la sphère, elle engendrera une figure terminée par des surfaces coniques. Que le cercle décrit autour des diamètres  $AR$  soit la base d'un cône qui ait son sommet au centre de la sphère. Prenons un cône  $K$ , qui ait une base égale à la surface de la figure inscrite et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du centre  $E$  sur un des côtés du polygone. Il faut démontrer que le cône  $K$  est égal à la figure dont nous venons de parler, réunie au cône  $AEG$ .

Sur les cercles qui ont pour diamètres les droites  $H\Theta$ ,  $ZA$ , construisons deux cônes qui aient leurs sommets au point  $E$ . Le rhombe solide  $HB\Theta E$  est égal à un cône qui a une base égale à la surface du cône  $HB\Theta$ , et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du point  $E$  sur  $HB$  (19). Le reste qui est terminé par la surface comprise entre les plans parallèles conduits par les droites  $H\Theta$ ,  $ZA$ , et par les surfaces coniques  $ZEA$ ,  $HE\Theta$ , est égal à un cône qui a une base égale à la surface comprise entre les plans parallèles



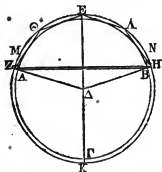
face de la figure  $AZHB\Theta\Lambda\Gamma$ ; et de plus le cône  $\kappa$  a la même hauteur, et sa base est égale à la surface de la figure inscrite. Donc le cône  $\kappa$  est égal à la somme des cônes dont nous venons de parler. Mais nous avons démontré que la somme des cônes dont nous venons de parler est égale à la figure inscrite, réunie au cône  $A\Gamma\Theta$ . Donc le cône  $\kappa$  est égal à la figure inscrite, réunie au cône  $E\Lambda\Gamma$ .

Il suit manifestement de là que le cône qui a pour base un cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment, et une hauteur égale au rayon de la sphère, est plus grand que la figure inscrite, réunie au cône  $A\Gamma\Theta$ . En effet, le cône dont nous venons de parler est plus grand qu'un cône égal à la figure inscrite, réunie au cône qui a la même base que le segment et dont le sommet est le centre de la sphère, c'est-à-dire plus grand qu'un cône qui a une base égale à la surface de la figure inscrite et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du centre sur le côté du polygone; car nous avons démontré que la base du premier est plus

grande que la base du second (50); et la hauteur du premier est plus grande que la hauteur du second.

## PROPOSITION XLII.

Soit une sphère; que  $AB\Gamma$  soit un de ses grands cercles; que la droite  $AB$  coupe un segment plus petit que la moitié de ce cercle; que le point  $\Delta$  soit le centre du cercle



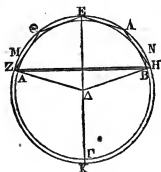
$AB\Gamma$ ; et du centre  $\Delta$  aux points  $A$ ,  $B$  menons les droites  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ . Circonscrivons un polygone au secteur produit par cette construction, et circonscrivons aussi un cercle à ce polygone. Ce cercle aura certainement le même centre que le cercle  $AB\Gamma$ . Si le diamètre  $EK$  restant immobile, nous faisons faire une révolution au polygone, le cercle



circonscrit décrira la surface d'une sphère; les angles du polygone décriront des cercles dont les diamètres sont des droites qui étant parallèles à  $AB$ , joignent les angles du polygone; les points où les côtés du polygone touchent le plus petit cercle, décriront dans la petite sphère des cercles dont les diamètres sont des droites qui étant parallèles à  $AB$ , joignent les points de contact; et les côtés du polygone décriront des surfaces coniques. De cette manière on circonscrit une figure terminée par des surfaces coniques dont la base sera le cercle décrit autour du diamètre  $ZH$ . La surface de la figure dont nous venons de parler est plus grande que la surface du petit segment sphérique dont la base est le cercle décrit autour du diamètre  $AB$ .

En effet, menons les tangentes  $AM$ ,  $BN$ ; ces tangentes décriront une surface conique, et la figure produite par la révolution du polygone  $AM\Theta E\Lambda NB$  aura une surface plus grande que la surface du segment sphérique dont la base est le cercle décrit autour du diamètre  $AB$ , parce que ces deux surfaces ont pour limite, dans un seul et même

plan, le cercle décrit autour du diamètre  $AB$ , et que le segment est compris par la figure. Or la surface conique engendrée par les droites  $ZM$ ,  $HN$  est plus grande que la



surface conique engendrée par  $MA$ ,  $NB$ ; parce que la droite  $ZM$  est plus grande que la droite  $MA$ , comme étant opposée à un angle droit, et que la droite  $NH$  est aussi plus grande que la droite  $NB$ : mais lorsque cela arrive, une des surfaces engendrées est plus grande que l'autre ( $\alpha$ ), ainsi que cela a été démontré dans les lemmes. Il est donc évident que la surface circonscrite est plus grande que la surface du segment de la petite sphère.

## PROPOSITION XLIII.

Il suit manifestement du théorème qui précède, que la surface de la figure circonscrite à un secteur sphérique est égale à un cercle dont le quarré du rayon est égal à la surface comprise sous un côté du polygone et sous la somme des droites qui joignent les angles du polygone, réunie avec la moitié de la base du polygone dont nous venons de parler.

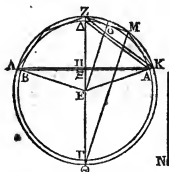
Car la figure qui est circonscrite au secteur est inscrite dans le segment de la plus grande sphère. Cela est évident d'après ce que nous avons dit plus haut (38).

## PROPOSITION XLIV.

La surface d'une figure circonscrite à un segment sphérique est plus grande que le cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment.

Soit une sphère; que  $A\Delta B\Gamma$  soit un de ses grands cercles, et le point  $E$  son centre. Cir-

concrivons au secteur  $A\Delta B$  un polygone  $AZK$ , et à ce polygone un cercle. Que cette construction engendre une figure, comme plus haut. Soit aussi un cercle  $N$  dont le quarré



du rayon soit égal à la surface comprise sous un des côtés du polygone, et sous la somme des droites qui joignent les angles, réunie à la moitié de la droite  $KA$ . Or, la surface dont nous venons de parler est égale à la surface comprise sous la droite  $M\Theta$ , et sous la droite  $ZH$ , qui est la hauteur du segment de la plus grande sphère, ainsi que cela a été démontré plus haut (23). Donc le quarré du rayon du cercle  $N$  est égal à la surface comprise sous  $M\Theta$ ,  $HZ$ . Mais la droite  $HZ$  est plus grande que la droite  $\Delta\Xi$ , qui est la hauteur du petit segment; car si l'on mène la droite  $kz$ , cette droite sera parallèle à la

droite  $\Delta A$ . Mais la droite  $AB$  est aussi parallèle à la droite  $\kappa A$ , et la droite  $ZE$  est commune; donc le triangle  $ZKH$  est semblable au triangle  $\Delta A\Xi$ . Mais la droite  $ZK$  est plus grande que la droite  $A\Delta$ ; donc la droite  $ZH$  est plus grande que la droite  $\Delta\Xi$ . De plus, la droite  $MO$  est égale au diamètre  $\Gamma\Delta$ . En effet, joignons les points  $E$ ,  $O$ ; puisque la droite  $MO$  est égale à la droite  $OZ$ , et la droite  $OE$  égale à la droite  $EZ$ , la droite  $EO$  est certainement parallèle à la droite  $m\theta$ . Donc la droite  $m\theta$  est double de la droite  $EO$ . Mais la droite  $\Gamma\Delta$  est aussi double de la droite  $EO$ ; donc la droite  $m\theta$  est égale à la droite  $\Gamma\Delta$ . Mais la surface comprise sous les droites  $\Gamma\Delta$ ,  $\Delta\Xi$  est égale au quarré construit sur la droite  $A\Delta$ . Donc la surface de la figure  $\kappa ZA$  est plus grande que le cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment, c'est-à-dire à la circonférence du cercle décrit autour du diamètre  $AB$ ; car le cercle  $N$  est égal à la surface de la figure circonscrite au secteur ( $\alpha$ ).

## PROPOSITION XLV.

La figure circonscrite à un secteur, avec le cône qui a pour base le cercle décrit autour du diamètre  $\kappa\lambda$ , et pour sommet le centre de la sphère, est égale à un cône qui a une base égale à la surface de la figure circonscrite, et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du centre sur un des côtés du polygone. Il est évident que cette perpendiculaire est égale au rayon de la sphère.

Car la figure circonscrite au secteur est en même temps inscrite dans le segment de la grande sphère, qui a le même centre que la petite. Donc cela est évident d'après ce qui a été dit plus haut (41).

## PROPOSITION XLVI

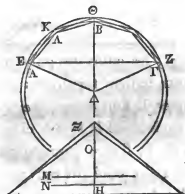
Il suit du théorème précédent, que la figure circonscrite, avec le cône, est plus grande qu'un cône qui a une base égale à un cercle ayant un rayon égal à la droite menée du sommet du segment de la petite sphère à

la circonférence du cercle qui est la base de ce segment, et une hauteur égale au rayon de la sphère.

Car le cône qui sera égal à la figure circonscrite, réunie au cône, aura certainement une base plus grande que le cercle dont nous venons de parler, tandis qu'il aura une hauteur égale au rayon de la petite sphère.

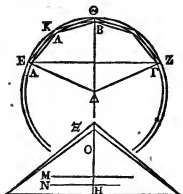
### PROPOSITION XLVII.

Soient une sphère et un grand cercle de cette sphère; que le segment  $AB\Gamma$  soit plus



petit que la moitié de ce grand cercle, et que le point  $\Delta$  soit le centre de ce cercle. Inscrivons dans le secteur  $AB\Gamma$  un polygone

équiangle ; circonscrivons à ce même secteur un polygone semblable au premier , et que les côtés de ces deux polygones soient parallèles. Circonscrivons un cercle au polygone circonscrit. Si , comme dans les théorèmes précédens , la droite  $\Delta B$  restant immobile , nous faisons faire une révolution



à ces cercles , les côtés des polygones engendreront deux figures terminées par des surfaces coniques. Il faut démontrer que la raison de la surface de la figure circonscrite à la surface de la figure inscrite est doublée de la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit ; et que la raison de ces figures réunies au cône est triplée de la raison de ces mêmes côtés.

Soit  $m$  un cercle dont le quarré du rayon



soit égal à la surface comprise sous le côté du polygone circonscrit, et sous la somme des droites qui joignent les angles, avec la moitié de la droite  $EZ$ . Le cercle  $M$  sera égal à la surface de la figure circonscrite. Soit  $N$  un autre cercle dont le quarré du rayon soit égal à la surface comprise sous le côté du polygone inscrit, et sous la somme des droites qui joignent les angles, avec la moitié de la droite  $AR$ . Ce cercle sera égal à la surface de la figure inscrite. Mais les surfaces dont nous venons de parler sont entre elles comme le quarré décrit sur  $EK$  et le quarré décrit sur  $AA$  ( $\alpha$ ). Donc le polygone circonscrit est au polygone inscrit comme le cercle  $M$  est au cercle  $N$ . Il est donc évident que la raison de la surface de la figure circonscrite à la surface de la figure inscrite est doublée de la raison de  $EK$  à  $AA$ , c'est-à-dire qu'elle est égale à la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit.

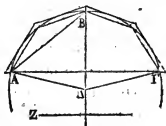
A présent, soit  $\pi$  un cône qui ait une base égale au cercle  $M$ , et une hauteur égale au rayon de la petite sphère; ce cône sera égal à la figure circonscrite, réunie au cône qui a pour base le cercle décrit autour du dia-

mètre  $EZ$  et pour sommet le point  $\Delta$  (45). Soit  $o$  un autre cône qui ait une base égale au cercle  $N$  et une hauteur égale à la perpendiculaire menée du point  $\Delta$  sur  $AA$ . Ce cône sera égal à la figure inscrite, réunie au cône qui a pour base le cercle décrit autour du diamètre  $AR$ , et pour sommet le point  $\Delta$ , ainsi que cela a été démontré (41). Mais la droite  $EK$  est au rayon de la petite sphère comme la droite  $AA$  est à la perpendiculaire menée du centre  $\Delta$  sur  $AA$ ; et il est démontré que  $EK$  est à  $AA$  comme le rayon du cercle  $M$  est au rayon du cercle  $N$  (6), et comme le diamètre du premier cercle est au diamètre du second. Donc le diamètre du cercle qui est la base du cône  $\pi$  est au diamètre du cercle qui est la base du cône  $o$ , comme la hauteur du cône  $\pi$  est à la hauteur du cône  $o$ . Donc ces cônes sont semblables; donc la raison du cône  $\pi$  au cône  $o$  est triplée de la raison du diamètre de la base du premier au diamètre de la base du second. Il est donc évident que la raison de la figure circonscrite, réunie au cône, à la figure inscrite, réunie au cône, est triplée de la raison  $EK$  à  $AA$ .

## PROPOSITION XLVIII.

La surface d'un segment sphérique quelconque plus petit que la moitié de la sphère, est égale à un cercle qui a pour rayon une droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment.

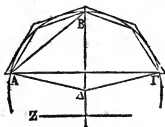
Soit une sphère; que  $AB\Gamma$  soit un de ses grands cercles. Soit un segment plus petit que la moitié de cette sphère, qui ait pour



base le cercle décrit autour du diamètre  $AG$ , et perpendiculaire sur le cercle  $AB\Gamma$ . Prenons un cercle  $Z$  dont le rayon soit égal à la droite  $AB$ . Il faut démontrer que la surface du segment  $AB\Gamma$  est égale à la surface du cercle  $Z$ .

Que la surface de ce segment ne soit point

égale au cercle  $z$ ; et supposons d'abord qu'elle soit plus grande. Prenons le centre  $\Delta$ ; du centre  $\Delta$  menons des droites aux points  $A$ ,  $\Gamma$ , et prolongeons ces droites. Puisque l'on a deux quantités inégales, savoir la surface du



segment et le cercle  $z$ , inscrivons dans le secteur  $AB\Gamma$  un polygone équilatère et équiangle; et circonscrivons-lui un polygone semblable, de manière que la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que la raison de la surface du segment au cercle  $z$  (6). Ayant fait faire, comme auparavant, une révolution au cercle  $AB\Gamma$ , on aura deux figures terminées par des surfaces coniques, l'une circonscrite et l'autre inscrite; et la surface de la figure circonscrite sera à la surface de la figure inscrite comme le polygone circonscrit est au polygone inscrit; car chacune de ces raisons est

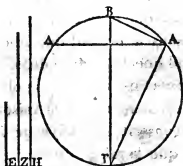
doublée de la raison du côté du polygone circonscrit au polygone inscrit (47). Mais la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit est moindre que la raison de la surface du segment dont nous venons de parler au cercle  $z$  ( $a$ ); et la surface de la figure circonscrite est plus grande que la surface du segment; donc la surface de la figure inscrite est plus grande que le cercle  $z$ . Ce qui ne peut être; car on a démontré que la surface de la figure dont nous venons de parler est moindre que le cercle  $z$  (40).

Supposons à présent que le cercle  $z$  soit plus grand que la surface du segment. Circonscrivons et inscrivons des polygones semblables, de manière que la raison du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que la raison du cercle  $z$  à la surface du segment..... (6). Donc la surface du segment n'est pas plus petite que le cercle  $z$ . Mais on a démontré qu'elle n'est pas plus grande; donc elle lui est égale.

## PROPOSITION XLIX.

Si le segment est plus grand que la moitié de la sphère, sa surface sera encore égale à un cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment.

Soient une sphère et un de ses grands cercles; supposons que le cercle ait été coupé



par un plan perpendiculaire conduit par la droite  $AA$ . Que le segment  $ABA$  soit plus petit que la moitié de la sphère; que le diamètre  $BT$  soit perpendiculaire sur  $AA$ ; et des points  $B, T$  menons au point  $A$  les droites  $BA, AT$ . Soit un cercle  $E$  qui ait un rayon égal à  $AB$ ; soit aussi un cercle  $Z$  qui ait un rayon

égal à  $AR$ ; et soit enfin un cercle  $H$  qui ait un rayon égal à  $RB$ . Le cercle  $H$  est égal à la somme des deux cercles  $E$ ,  $Z$ . Mais le cercle  $H$  est égal à la surface totale de la sphère, parce que chacune de ces surfaces est quadruple du cercle décrit autour du diamètre  $BR$ ; et le cercle  $E$  est égal à la surface du segment  $AB\Delta$ , ainsi que cela a été démontré pour un segment moindre que la moitié de la sphère (48); donc le cercle restant  $Z$  est égal à la surface du segment  $AR\Delta$ ; et ce segment est plus grand que la moitié de la sphère.

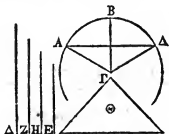
## PROPOSITION L

Un secteur quelconque d'une sphère est égal à un cône qui a une base égale à la surface du segment sphérique qui est dans le secteur, et une hauteur égale au rayon de cette sphère.

Soit une sphère; que  $AB\Delta$  soit un de ses grands cercles. Que le point  $r$  soit le centre de ce cercle. Soit un cône qui ait pour base un cercle égal à la surface décrite par l'arc  $AB\Delta$  et pour hauteur une droite égale à  $BR$ . Il faut démontrer que le secteur  $ABr\Delta$  est égal

au cône dont nous venons de parler.

Car si ce secteur n'est pas égal à ce cône, supposons que ce secteur soit plus grand. Que

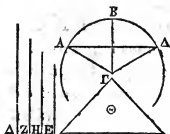


le cône dont nous venons de parler soit  $\Theta$ . Puisque nous avons deux quantités inégales, le secteur et le cône  $\Theta$ , cherchons deux droites  $\Delta$ ,  $E$ , dont la plus grande soit  $\Delta$ ; que la raison de  $\Delta$  à  $E$  soit moindre que la raison du secteur à ce cône (3). Prenons ensuite deux droites  $z$ ,  $h$ , de manière que l'excès de  $\Delta$  sur  $z$  soit égal à l'excès de  $z$  sur  $h$ , et à l'excès de  $h$  sur  $E$ . Dans le plan du cercle, circonscrivons au secteur un polygone équilatère dont le nombre des angles soit pair, et inscrivons dans ce même secteur un polygone semblable au premier, de manière que la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que la raison de  $\Delta$  à  $z$  (6). Ayant fait faire une révolution



au cercle  $AB\Delta$ , comme dans les théorèmes précédens, on aura deux figures terminées par des surfaces coniques. La raison de la figure circonscrite, avec le cône qui a son sommet au point  $r$ , à la figure inscrite, avec ce même cône, sera triplée de la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit (47). Mais la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit est moindre que la raison de  $\Delta$  à  $z$ ; donc la raison de la figure solide circonscrite dont nous venons de parler à la figure inscrite est moindre que la raison triplée de  $\Delta$  à  $z$ . Mais la raison de  $\Delta$  à  $E$  est plus grande que la raison triplée de  $\Delta$  à  $z$  ( $\alpha$ ); donc la raison de la figure solide circonscrite au secteur à la figure inscrite est moindre que la raison de  $\Delta$  à  $E$ . Mais la raison de  $\Delta$  à  $E$  est moindre que la raison du secteur solide au cône  $\theta$ ; donc la raison de la figure solide qui est circonscrite au secteur à la figure inscrite est moindre que la raison du secteur solide au cône  $\theta$ , et par permutation.....(6): Mais la figure solide circonscrite est plus grande que le secteur; donc la figure inscrite au secteur est plus grande que le cône  $\theta$ .

Ce qui ne peut être; car on a démontré, dans les théorèmes précédens, que cette figure est plus grande que ce cône, c'est-à-dire qu'un cône\* qui a pour base un cercle dont le



rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment, et pour hauteur une droite égale au rayon de la sphère (41). Mais le cône dont nous venons de parler est le même que le cône  $\Theta$ , puisque ce cône a une base égale à la surface du segment, c'est-à-dire au cercle dont nous avons parlé, et pour hauteur une droite égale au rayon de la sphère. Donc le secteur solide n'est pas plus grand que le cône  $\Theta$ .

Supposons à présent que le cône  $\Theta$  soit plus grand que le secteur solide. Que la raison de la droite  $\Delta$  à la droite  $E$ , dont la droite  $\Delta$  est plus grande, soit moindre que

la raison du cône au secteur. Prenons également deux droites  $z$ ,  $h$ , de manière que la raison du côté du polygone qui est circonscrit dans le secteur plan et dont le nombre des angles est pair, au côté du polygone inscrit soit moindre que la raison de  $\Delta$  à  $z$ ; et circonscrivons au secteur solide une figure solide, et inscrivons - lui une autre figure solide. Nous démontrerons de la même manière que la raison de la figure qui est circonscrite au secteur solide à la figure inscrite est moindre que la raison de  $\Delta$  à  $E$ , et que la raison du cône  $\Theta$  au secteur. Donc la raison du secteur au cône  $\Theta$  est moindre que la raison de la figure solide inscrite dans le segment à la figure circonscrite. Mais le secteur est plus grand que la figure qui lui est inscrite; donc le cône  $\Theta$  est plus grand que la figure circonscrite, ce qui ne peut être. Car on a démontré qu'un tel cône est plus petit que la figure circonscrite au secteur (44). Donc le secteur est égal au cône  $\Theta$ .

## DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE.

## LIVRE SECOND.

ARCHIMÈDE A DOSITHÉE, SALUT.

Tu m'avois engagé à écrire les démonstrations des problèmes que j'avois envoyés à Conon; mais il est arrivé que la plupart de ces problèmes découlent des théorèmes dont je t'ai déjà envoyé les démonstrations; tels sont, par exemple, les théorèmes suivans :

La surface d'une sphère quelconque est quadruple d'un de ses grands cercles.

La surface d'un segment sphérique quelconque est égale à un cercle qui a un rayon égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence de sa base.

Un cylindre qui a une base égale à un grand cercle d'une sphère, et une hauteur égale au diamètre de cette sphère, est égal à

trois fois la moitié de cette sphère, et la surface de ce cylindre est aussi égale à trois fois la moitié de la surface de cette même sphère.

Et enfin, tout secteur solide est égal à un cône qui a une base égale à la partie de la surface de la sphère comprise dans le secteur, et une hauteur égale au rayon de la sphère.

Tu trouveras dans le livre que je t'envoie tous les théorèmes et tous les problèmes qui découlent des théorèmes dont je viens de parler. Quant aux choses que l'on trouve par d'autres considérations et qui regardent les élices et les canoïdes, je ferai en sorte de te les envoyer le plutôt possible.

Voici quel étoit le premier problème.

### PROPOSITION I.

Une sphère étant donnée, trouver une surface plane égale à la surface de cette sphère.

Cela est évident; car la démonstration de ce problème est une suite du théorème dont nous venons de parler; attendu que le qua-

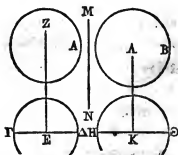
druple d'un grand cercle, qui est une surface plane, est égal à la surface de la sphère.

## PROPOSITION II

Le problème suivant étoit le second.

Un cône ou un cylindre étant donné, trouver une sphère égale à ce cône ou à ce cylindre.

Soit A le cône ou le cylindre donné. Que la



sphère B soit égale à A. Supposons que le cylindre  $\Gamma Z \Delta$  soit égal à trois fois la moitié du cône ou du cylindre A. Que le cylindre qui a pour base le cercle décrit autour du diamètre  $H\Theta$ , et pour axe la droite  $K\Lambda$  égale au diamètre de la sphère B, soit égal à trois fois la moitié de la sphère B : le cylindre E sera

égal au cylindre  $\kappa$ . Mais les bases des cylindres égaux sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs; donc le cercle  $\kappa$  est au cercle  $\kappa$ , c'est-à-dire le quarré construit sur  $\Gamma\Delta$  est au quarré construit sur  $\text{H}\Theta$  comme  $\kappa\Lambda$  est à  $\text{E}\text{Z}$ . Mais  $\kappa\Lambda$  est égal à  $\text{H}\Theta$ ; car un cylindre qui est égal à trois fois la moitié de la sphère, et dont l'axe est égal au diamètre de cette même sphère, a une base  $\kappa$  égale à un grand cercle de cette même sphère (1, 37). Donc le quarré construit sur  $\Gamma\Delta$  est au quarré construit sur  $\text{H}\Theta$  comme  $\text{H}\Theta$  est à  $\text{E}\text{Z}$ . Que la surface comprise sous  $\Gamma\Delta$ ,  $\text{MN}$  soit égale au quarré construit sur  $\text{H}\Theta$  ( $\alpha$ ). La droite  $\Gamma\Delta$  sera à la droite  $\text{MN}$  comme le quarré construit sur  $\Gamma\Delta$  est au quarré construit sur  $\text{H}\Theta$ , c'est-à-dire comme  $\text{H}\Theta$  est à  $\text{E}\text{Z}$ ; et par permutation, la droite  $\Gamma\Delta$  est à la droite  $\text{H}\Theta$  comme  $\text{H}\Theta$  est à  $\text{MN}$ , et comme  $\text{MN}$  est à  $\text{E}\text{Z}$ . Mais les deux droites  $\Gamma\Delta$ ,  $\text{E}\text{Z}$  sont données (6); donc les deux moyennes proportionnelles  $\text{H}\Theta$ ,  $\text{MN}$  entre les deux droites  $\Gamma\Delta$ ,  $\text{E}\text{Z}$  sont aussi données. Donc chacune des deux droites  $\text{H}\Theta$ ,  $\text{MN}$  est donnée.

On construira le problème de la manière suivante. Soit  $\Lambda$  le cône ou le cylindre donné.

Il faut trouver une sphère égale au cône ou au cylindre  $\Lambda$ .

Que le cylindre dont la base est le cercle décrit autour du diamètre  $\Gamma\Delta$ , et dont l'axe



est la droite  $EZ$ , soit égal à trois fois la moitié du cône ou du cylindre  $\Lambda$ . Prenons deux moyennes proportionnelles  $H\Theta$ ,  $MN$  entre  $\Gamma\Delta$ ,  $EZ$ , de manière que  $\Gamma\Delta$  soit  $H\Theta$  comme  $H\Theta$  est à  $MN$ , et comme  $MN$  est à  $EZ$  (2); et concevons un cylindre qui ait pour base le cercle décrit autour du diamètre  $H\Theta$ , et pour axe la droite  $K\Lambda$  égale au diamètre  $H\Theta$ . Je dis que le cylindre  $E$  est égal au cylindre  $K$ .

Puisque  $\Gamma\Delta$  est à  $H\Theta$  comme  $MN$  est à  $EZ$ ; par permutation, et à cause que  $H\Theta$  est égal à  $K\Lambda$  (3), la droite  $\Gamma\Delta$  sera à la droite  $MN$ , c'est-à-dire, le quarré construit sur  $\Gamma\Delta$  sera au quarré construit sur  $H\Theta$  comme le cercle



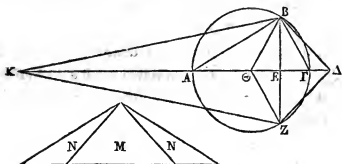
E est au cercle K. Mais le cercle E est au cercle K comme KA est à EZ ; donc les bases E, K des cylindres sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs ; donc le cylindre E est égal au cylindre K. Mais le cylindre K est égal à trois fois la moitié de la sphère qui a pour diamètre la droite HΘ ; donc la sphère qui a un diamètre égal à la droite HΘ, c'est-à-dire, la sphère B est égale au cône ou au cylindre A.

### PROPOSITION III.

Un segment quelconque d'une sphère est égal à un cône qui a la même base que ce segment, et pour hauteur une droite qui est à la hauteur du segment comme une droite composée du rayon de la sphère et de la hauteur de l'autre segment est à la hauteur de cet autre segment.

Soient une sphère et un de ses grands cercles qui ait pour diamètre la droite AR. Coupons cette sphère par un plan mené par la droite BZ, et perpendiculaire sur la droite AR. Que le point Θ soit le centre. Que la somme des deux droites ΘA, AE soit à la

droite AE comme  $\Delta E$  est à  $FE$ ; et de plus, que la somme des deux droites  $\Theta r$ ,  $FE$  soit à la droite  $FE$  comme  $KE$  est à  $EA$ . Sur le cercle dont  $BZ$  est le diamètre, construisons deux

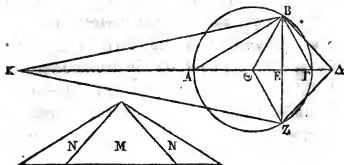


cônes qui aient pour sommets les points  $K$ ,  $\Delta$ . Je dis que le cône  $B\Delta Z$  est égal au segment de la sphère qui est du côté  $r$ , et que le cône  $BKZ$  est égal au segment de la sphère qui est du côté  $A$ .

Menons les rayons  $B\Theta$ ,  $\Theta Z$  : concevons un cône qui ait pour base le cercle décrit autour du diamètre  $BZ$ , et pour sommet le point  $\Theta$ . Soit aussi un cône  $M$  qui ait une base égale à la surface du segment sphérique  $Brz$ , c'est-à-dire à un cercle dont le rayon soit égal à la droite  $Br$ ; et que la hauteur de ce cône soit égale au rayon de la sphère. Le cône  $M$  sera égal au secteur solide  $B\Theta z$ ,

ainsi que cela a été démontré dans le premier livre (1, 50). Puisque  $\Delta E$  est à  $ET$  comme la somme des droites  $\Theta A$ ,  $AE$  est à la droite  $AE$ ; par soustraction, la droite  $\Gamma \Delta$  sera à la droite  $\Gamma E$  comme  $\Theta A$  est à  $AE$ , c'est-à-dire comme  $\Gamma \Theta$  est à  $AE$ ; par permutation, la droite  $\Delta \Gamma$  sera à la droite  $\Gamma \Theta$  comme  $\Gamma E$  est à  $EA$ ; et enfin par addition, la droite  $\Theta \Delta$  sera à la droite  $\Theta \Gamma$  comme  $\Gamma A$  est à  $AE$ , c'est-à-dire comme le quarré construit sur  $\Gamma B$  est au quarré construit sur  $BE$ . Donc la droite  $\Theta \Delta$  est à la droite  $\Gamma \Theta$  comme le quarré construit sur  $\Gamma B$  est au quarré construit sur  $BE$ . Mais la droite  $\Gamma B$  est égale au rayon du cercle  $M$ , et la droite  $BE$  est égale au rayon du cercle décrit autour du diamètre  $BZ$ ; donc  $\Delta \Theta$  est à  $\Theta \Gamma$  comme le cercle  $M$  est au cercle décrit autour du diamètre  $BZ$ . Mais la droite  $\Theta \Gamma$  est égale à l'axe du cône  $M$ ; donc la droite  $\Delta \Theta$  est à l'axe du cône  $M$  comme le cercle  $M$  est au cercle décrit autour du diamètre  $BZ$ ; donc le cône qui a pour base le cercle  $M$ , et pour hauteur le rayon de la sphère est égal au rhombe solide  $B \Delta Z \Theta$ , ainsi que cela a été démontré dans le quatrième lemme du premier livre (1, 17). Ou bien de la manière sui-

vante, puisque la droite  $\Delta\Theta$  est à la hauteur du cône  $M$  comme le cercle  $M$  est au cercle décrit autour du diamètre  $BZ$ , le cône  $M$  sera égal au cône qui a pour base le cercle



décrit autour du diamètre  $BZ$  et pour hauteur la droite  $\Delta\Theta$  ; car les bases de ces cônes sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs. Mais le cône qui a pour base le cercle décrit autour du diamètre  $BZ$ , et pour hauteur la droite  $\Delta\Theta$ , est égal au rhombe solide  $B\Delta Z\Theta$  ; donc le cône  $M$  est aussi égal au rhombe solide  $B\Delta Z\Theta$ . Mais le cône  $M$  est égal au secteur solide  $BRZ\Theta$  ; donc le secteur solide  $BRZ\Theta$  est égal au rhombe solide  $B\Delta Z\Theta$ . Donc si l'on retranche le cône commun qui a pour base le cercle décrit autour du diamètre  $BZ$  et pour hauteur la droite  $\Theta\Theta$ , le

cône restant  $B\Delta Z$  sera égal au segment sphérique  $BZ\Gamma$ .

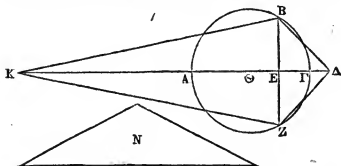
On démontrera semblablement que le cône  $BKZ$  est égal au segment sphérique  $BAZ$ . En effet, puisque la droite  $KE$  est à la droite  $EA$  comme la somme des droites  $EG$ ,  $TE$  est à la droite  $TE$ ; par soustraction, la droite  $KA$  est à la droite  $AE$  comme  $EG$  est à  $TE$ . Mais  $EG$  est égal à  $EA$ ; donc, par permutation, la droite  $KA$  est à la droite  $AE$  comme  $AE$  est à  $EG$ . Donc, par addition, la droite  $KE$  est à la droite  $EA$  comme  $AE$  est à  $TE$ , c'est-à-dire comme le carré construit sur  $BA$  est au carré construit sur  $BE$ . Supposons de nouveau un cercle  $N$ , qui ait un rayon égal à la droite  $AB$ . Le cercle  $N$  sera égal à la surface du segment sphérique  $BAZ$ . Concevons un cône  $N$  qui ait une hauteur égale au rayon de la sphère; ce cône sera égal au secteur solide  $B\Theta ZA$ , ainsi que cela a été démontré dans le livre premier (1, 50) ( $\alpha$ ). Mais nous avons démontré que la droite  $KE$  est à la droite  $EA$  comme le carré construit sur  $AB$  est au carré construit sur  $BE$ , c'est-à-dire comme le carré construit sur le rayon du cercle  $N$  est au carré du rayon du cercle

décrit autour du diamètre  $BZ$ , c'est-à-dire comme le cercle  $N$  est au cercle décrit autour du diamètre  $BZ$ ; et la droite  $A\Theta$  est égale à la hauteur du cône  $N$ ; donc la droite  $K\Theta$  est à la hauteur du cône  $N$  comme le cercle  $N$  est au cercle décrit autour du diamètre  $BZ$ . Donc le cône  $N$ , c'est-à-dire le secteur  $B\Theta ZA$  est égal à la figure  $B\Theta ZK$ . Donc si nous ajoutons à chacun de ces deux solides le cône dont la base est le cercle décrit autour de  $BZ$ , et dont la hauteur est la droite  $E\Theta$ , le segment sphérique total  $ABZ$  sera égal au cône  $BZK$  (6). Ce qu'il falloit démontrer.

Il est encore évident qu'en général un segment sphérique est à un cône qui a la même base et la même hauteur que ce segment, comme la somme du rayon de la sphère et de la hauteur de l'autre segment est à la hauteur de cet autre segment; car la droite  $\Delta E$  est à la droite  $ER$  comme le cône  $\Delta ZB$ , c'est-à-dire le segment  $BZ$  est au cône  $BZ$ .

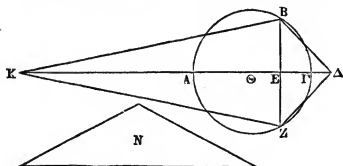
Les mêmes choses étant supposées, nous démontrerons autrement que le cône  $KBZ$  est égal au segment sphérique  $AZB$ . Soit un cône  $N$  qui ait une base égale à la surface de la

sphère et une hauteur égale au rayon. Ce cône sera égal à la sphère. En effet, nous avons démontré que la sphère est quadruple du cône qui a pour base un grand cercle



de cette sphère et pour hauteur un rayon de cette même sphère (1, 56); or le cône N est aussi quadruple du cône dont nous venons de parler, parce que la base du premier cône est quadruple de la base du second, et que la surface de la sphère est quadruple d'un de ses grands cercles. Puisque la somme des droites  $OA$ ,  $AE$  est à la droite  $AE$  comme  $\Delta E$  est à  $ER$ ; par soustraction et par permutation, la droite  $OR$  sera à la droite  $\Gamma\Delta$  comme  $AE$  est à  $ER$ . De plus, puisque la droite  $KE$  est à la droite  $EA$  comme la somme des droites  $OR$ ,  $\Gamma E$  sera à la droite  $\Gamma E$ ; par soustraction et par permutation, la droite

KA sera à la droite  $\Gamma\Theta$  ou à la droite  $\Theta A$  comme AE est à  $\Gamma\Gamma$ , c'est-à-dire comme  $\Theta\Gamma$  est à  $\Gamma\Delta$ . Donc, par addition, et à cause que la droite  $A\Theta$  est égale à la droite  $\Theta\Gamma$ , la droite



$K\Theta$  sera à la droite  $\Theta\Gamma$  comme  $\Theta\Delta$  est à  $\Delta\Gamma$ ; et ( $\gamma$ ) la droite totale  $K\Delta$  est à la droite  $\Delta\Theta$  comme  $\Delta\Theta$  est à  $\Delta\Gamma$ , c'est-à-dire comme  $K\Theta$  est à  $\Theta A$ . Donc la surface comprise sous  $\Delta\Theta$ ,  $\Theta K$  est égale à la surface comprise sous  $\Delta K$ ,  $\Theta A$ . De plus, puisque  $K\Theta$  est à  $\Theta\Gamma$  comme  $\Theta\Delta$  est à  $\Gamma\Delta$ ; par permutation, la droite  $K\Theta$  sera à la droite  $\Theta\Delta$  comme  $\Theta\Gamma$  est à  $\Gamma\Delta$ . Mais nous avons démontré que  $\Theta\Gamma$  est à  $\Gamma\Delta$  comme AE est à  $\Gamma\Gamma$ ; donc  $K\Theta$  est à  $\Theta\Delta$  comme AE est à  $\Gamma\Gamma$ . Donc le quarré construit sur  $K\Delta$  est à la surface comprise sous  $K\Theta$ ,  $\Theta\Delta$  comme le quarré construit sur  $\Gamma\Gamma$  est à la surface comprise sous AE,  $\Gamma\Gamma$  ( $\delta$ ). Mais on a démontré que



la surface comprise sous  $\kappa\theta$ ,  $\theta\Delta$  est égale à la surface comprise sous  $\kappa\Delta$ ,  $\Lambda\theta$ ; donc le quarré construit sur  $\kappa\Delta$  est à la surface comprise sous  $\kappa\Delta$ ,  $\Lambda\theta$ , c'est-à-dire que  $\kappa\Delta$  est à  $\Lambda\theta$  comme le quarré construit sur  $\Lambda\Gamma$  est à la surface comprise sous  $\Lambda E$ ,  $E\Gamma$ , c'est-à-dire au quarré construit sur  $EB$ . Mais  $\Lambda\Gamma$  est égal au rayon du cercle  $N$ ; donc le quarré construit sur le rayon du cercle  $N$  est au quarré construit sur la droite  $BE$ , c'est-à-dire que le cercle  $N$  est au cercle décrit autour du diamètre  $BZ$  comme  $\kappa\Delta$  est à  $\Lambda\theta$ , c'est-à-dire comme la droite  $\kappa\Delta$  est à la hauteur du cône  $N$ . Donc le cône  $N$ , c'est-à-dire la sphère, est égal au rhombe solide  $B\Delta Z\kappa$  (1, 17, *lemm.* 4). Ou bien de cette manière, donc le cercle  $N$  est au cercle décrit autour du diamètre  $BZ$  comme la droite  $\kappa\Delta$  est à la hauteur du cône  $N$ . Donc le cône  $N$  est égal au cône dont la base est le cercle décrit autour du diamètre  $BZ$  et dont la hauteur est  $\Delta\kappa$ ; car les bases de ces cônes sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs (1, 17, *lemm.* 4). Mais le cône  $N$  est égal au rhombe solide  $B\kappa Z\Delta$ ; donc le cône  $N$ , c'est-à-dire la sphère, est aussi égal au rhombe

solide  $BKZ\Delta$ , qui est composé des cônes  $B\Delta Z$ ,  $BKZ$ . Mais nous avons démontré que le cône  $B\Delta Z$  est égal au segment sphérique  $Brz$ ; donc le cône restant  $BKZ$  est égal au segment sphérique  $BAZ$  (§).

### PROPOSITION IV.

Le troisième problème étoit celui-ci : couper une sphère donnée par un plan, de manière que les surfaces des segmens aient entre elles une raison égale à une raison donnée.

Supposons que cela soit fait. Que  $A\Delta BE$  soit un grand cercle de la sphère, et que  $AB$  soit son diamètre ; que la

section du cercle  $A\Delta BE$  par ce plan soit la droite  $\Delta E$ , et menons les droites  $A\Delta$ ,  $B\Delta$ . Puisque la raison de la surface du seg-



ment  $\Delta AE$  à la surface du segment  $\Delta BE$  est donnée; que la surface du segment  $\Delta AE$  est égale à un cercle qui a un rayon égal à la droite  $A\Delta$  (1, 49); et que la surface du segment  $\Delta BE$  est égale à un cercle qui a un

rayon égal à la droite  $\Delta B$  (1, 48); et à cause que les cercles dont nous venons de parler sont entre eux comme les quarrés construits sur les droites  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ , c'est-à-dire comme les droites  $A\Gamma$ ,  $\Gamma B$ ; il est évident que la raison de  $A\Gamma$  à  $\Gamma B$  est donnée, et par conséquent le point  $\Gamma$ . Mais la droite  $\Delta E$  est perpendiculaire sur  $AB$ ; donc le plan qui passe par  $\Delta E$  est donné de position.

On construira ce problème de la manière suivante : soit la sphère dont  $A\Delta BE$  est un grand cercle et dont  $AB$  est le diamètre. Que la raison donnée soit la même que celle de la droite  $z$  à la droite  $h$ . Coupons la droite  $AB$  au point  $\Gamma$ , de manière que  $A\Gamma$  soit à  $\Gamma B$  comme  $z$  est à  $h$ ; par le point  $\Gamma$  coupons la sphère par un plan perpendiculaire sur  $AB$ ; et que la commune section soit  $\Delta E$ . Menons les droites  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ . Supposons enfin deux cercles  $\theta$ ,  $\kappa$  dont l'un ait un rayon égal à la droite  $\Delta A$  et l'autre un rayon égal à la droite  $\Delta B$ . Le cercle  $\theta$  sera égal à la surface du segment  $\Delta A E$ , et le cercle  $\kappa$  égal à la surface du segment  $\Delta B E$ , ainsi que cela a été démontré dans le premier livre (1, 48 et 49). Puisque l'angle  $\Delta A B$  est donné et que

la droite  $\Gamma\Delta$  est perpendiculaire, la droite  $\Gamma\Theta$  est à la droite  $\Gamma\Xi$ , c'est-à-dire que  $\Xi$  est à  $\Theta$  comme le carré construit sur  $\Delta\Gamma$  est au carré construit sur  $\Delta\Xi$ , c'est-à-dire comme le carré construit sur le rayon du cercle  $\Theta$  est au carré construit sur le rayon du cercle  $\kappa$ , c'est-à-dire comme la surface du segment sphérique  $\Delta\Theta\Xi$  est à la surface du segment sphérique  $\Delta\kappa\Xi$ .



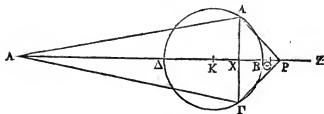
### PROPOSITION V.

Couper une sphère donnée de manière que les segmens aient entre eux une raison égale à une raison donnée.

Soit  $AB\Gamma\Delta$  la sphère donnée. Il faut la couper par un plan de manière que les segments aient entre eux une raison égale à une raison donnée.

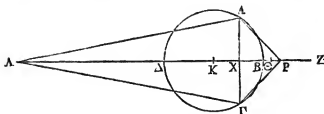
Coupons cette sphère par un plan conduit par  $AR$ . La raison du segment sphérique  $ADR$  au segment sphérique  $ABR$  sera donnée. Coupons cette sphère par un plan qui passe

par son centre ; que cette section soit le grand cercle  $AB\Gamma\Delta$  ; que le point  $K$  soit son centre, et  $\Delta B$  son diamètre. Que la somme des droites  $K\Delta$ ,  $\Delta X$  soit à la droite  $\Delta X$  comme



$PX$  est à  $XB$  ; et que la somme des droites  $KB$ ,  $BX$  soit à la droite  $BX$  comme  $AX$  est à  $X\Delta$ . Menons les droites  $AA$ ,  $\Delta\Gamma$ ,  $AP$ ,  $P\Gamma$ . Le cône  $A\Delta\Gamma$  sera égal au segment sphérique  $A\Delta\Gamma$  ; et le cône  $AP\Gamma$  égal au segment  $AB\Gamma$  (2, 3). Donc la raison du cône  $A\Delta\Gamma$  au cône  $AP\Gamma$  sera donnée. Mais le premier cône est au second comme  $AX$  est à  $XP$ , puisque ces deux cônes ont pour base le cercle décrit autour de la droite  $A\Gamma$  ; donc la raison de  $AX$  à  $XP$  est aussi donnée. Par la même raison qu'auparavant, et par construction (2, 3), la droite  $\Delta\Delta$  est à la droite  $K\Delta$  comme  $KB$  est à  $BP$ , et comme  $\Delta X$  est à  $XB$ . Mais la droite  $PB$  est à la droite  $BK$  comme  $K\Delta$  est à  $\Delta\Delta$  ; donc par addition la

droite PK est à KB, c'est-à-dire à KΔ comme KΛ est à ΛΔ. Donc (α), la droite totale PA est à la droite totale KΛ comme KΛ est à ΛΔ. Donc la surface comprise sous PA, ΛΔ est



égale au carré construit sur  $KA$ . Donc  $PA$  est à  $AD$  comme le carré construit sur  $KA$  est au carré construit sur  $AD$  (6). Mais  $AD$  est à  $AK$  comme  $AX$  est à  $XB$ ; donc par inversion et par addition, la droite  $KA$  est à la droite  $AD$  comme  $BD$  est à  $AX$ . Donc le carré construit sur  $KA$  est au carré construit sur  $AD$  comme le carré construit sur  $BD$  est au carré construit sur  $AX$ . De plus, puisque  $AX$  est à  $AX$  comme la somme des droites  $KB$ ,  $BX$  est à  $BX$ ; par soustraction, la droite  $AD$  sera à la droite  $AX$  comme  $KB$  est à  $BX$ . Faisons  $EZ$  égal à  $KB$ . Il est évident que cette droite tombera au-delà du point  $P$  (7). Mais la droite  $AD$  est à la droite  $AX$  comme  $ZB$  est

à  $BX$ ; donc  $\Delta A$  sera à  $\Delta X$  comme  $BZ$  est à  $ZX$  ( $\delta$ ). Puisque non-seulement la raison de  $\Delta A$  à  $\Delta X$  est donnée, mais encore celle de  $PA$  à  $\Delta X$ , ainsi que celle de  $PA$  à  $\Delta A$ ; et puisque la raison de  $PA$  à  $\Delta X$  est composée de la raison de  $PA$  à  $\Delta A$ , et de la raison de  $\Delta A$  à  $\Delta X$  ( $\epsilon$ ); que  $PA$  est à  $\Delta A$  comme le quarré construit sur  $\Delta B$  est au quarré construit sur  $\Delta X$ , et que  $\Delta A$  est à  $\Delta X$  comme  $BZ$  est à  $ZX$ , la raison de  $PA$  à  $\Delta X$  est composée de la raison du quarré construit sur  $B\Delta$  au quarré construit sur  $\Delta X$ , et de la raison de  $BZ$  à  $ZX$  ( $\zeta$ ). Faisons en sorte que  $PA$  soit à  $\Delta X$  comme  $BZ$  est à  $Z\Theta$ . Or la raison de  $PA$  à  $\Delta X$  est donnée; donc la raison de  $ZB$  à  $Z\Theta$  est aussi donnée. Mais la droite  $BZ$  est donnée, puisqu'elle est égale au rayon; donc la droite  $Z\Theta$  est aussi donnée. Donc la raison de  $BZ$  à  $Z\Theta$  est composée de la raison du quarré construit sur  $B\Delta$  au quarré construit sur  $\Delta X$ , et de la raison de  $BZ$  à  $ZX$ . Mais la raison de  $BZ$  à  $Z\Theta$  est composée de la raison de  $BZ$  à  $ZX$ , et de la raison de  $ZX$  à  $Z\Theta$ ; donc si nous retranchons la raison commune de  $BZ$  à  $ZX$ , la raison restante, c'est-à-dire la raison du quarré construit sur la droite  $B\Delta$  qui est

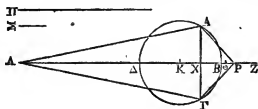
donné, au quarré construit sur la droite  $\Delta x$ , sera égale à la raison de  $xz$  à la droite  $z\theta$ , qui est donnée; mais la droite  $z\Delta$  est donnée. Il faut donc couper la droite donnée  $\Delta z$  en un point  $x$ , de-manière que la droite  $xz$  soit à la droite donnée  $z\theta$  comme le quarré construit sur  $B\Delta$  est au quarré construit sur  $\Delta x$ ; et si cela est énoncé d'une manière générale, il y aura une solution; si, au contraire, on ajoute les choses trouvées, c'est-à-dire que  $\Delta B$  est double de  $BZ$  et que  $BZ$  est plus grand que  $z\theta$ , il n'y aura aucune solution. Le problème doit donc être posé ainsi: étant données deux droites  $\Delta B$ ,  $BZ$  dont  $\Delta B$  soit double de  $BZ$ ; étant donné aussi le point  $\theta$  dans la droite  $BZ$ , couper la droite  $\Delta B$  en un point  $x$ , de manière que le quarré construit sur  $B\Delta$  soit un quarré construit sur  $\Delta x$  comme  $xz$  est à  $z\theta$ . Chacune de ces choses aura à la fin sa solution et sa construction( $\pi$ ).

On construira le problème de cette manière: Que la raison donnée soit la même que celle de la droite  $\pi$  à la droite  $z$ , la droite  $\pi$  étant plus grande que la droite  $z$ . Soit donnée aussi une sphère quelconque;





tion, ainsi que nous l'avons démontré plus haut, égale au quarré construit sur  $\Delta K$ ; et la droite  $\Delta K$  sera à la droite  $\Delta \Delta$  comme  $B \Delta$  est à  $\Delta x$ . Donc le quarré construit sur  $\Delta K$



est au quarré construit sur  $\Delta \Delta$  comme le quarré construit sur  $B \Delta$  est au quarré construit sur  $\Delta x$ . Mais la surface comprise sous  $PA$ ,  $\Delta \Delta$  est égale au quarré construit sur  $\Delta K$ ; donc la droite  $PA$  est à la droite  $\Delta \Delta$  comme le quarré construit sur  $\Delta K$  est au quarré construit sur  $\Delta \Delta$ . Donc aussi la droite  $PA$  est à la droite  $\Delta \Delta$  comme le quarré construit sur  $B \Delta$  est au quarré construit sur  $\Delta x$ , c'est-à-dire, comme  $xz$  est à  $z\theta$ . Mais la somme des droites  $KB$ ,  $Bx$  est à la droite  $Bx$  comme  $\Delta x$  est à  $\Delta x$ , et la droite  $KB$  est égale à la droite  $Bz$ ; donc la droite  $xz$  sera à la droite  $xB$  comme  $\Delta x$  est à  $x\Delta$ ; et par conversion, la droite  $xz$  sera à  $zB$  comme  $x\Delta$  est à  $\Delta \Delta$ . Donc aussi la droite  $\Delta \Delta$  sera à la

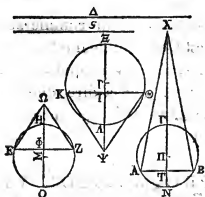
droite  $\Delta X$  comme  $BZ$  est à  $ZX$ . Mais  $PA$  est à  $\Delta A$  comme  $XZ$  est à  $Z\Theta$ ; et  $\Delta A$  est à  $\Delta X$  comme  $BZ$  est à  $ZX$ ; donc, par raison d'égalité dans la proportion troublée, la droite  $PA$  sera à la droite  $\Delta X$  comme  $BZ$  est à  $Z\Theta$ . Donc aussi  $\Delta X$  est à  $XP$  comme  $Z\Theta$  est à  $\Theta B$ . Mais  $Z\Theta$  est à  $\Theta B$  comme  $\Pi$  est à  $\Sigma$ ; donc aussi  $\Delta X$  est à  $XP$ , c'est-à-dire que le cône  $\Delta \Gamma A$  est au cône  $\Delta P \Gamma$ , c'est-à-dire que le segment sphérique  $\Delta \Delta \Gamma$  est au segment  $AB \Gamma$  comme  $\Pi$  est à  $\Sigma$  ( $\theta$ ).

## PROPOSITION VI.

Construire un segment sphérique semblable à un segment sphérique donné, et égal à un autre segment sphérique aussi donné.

Soient  $AB \Gamma$ ,  $EZH$ , les deux segmens sphériques donnés. Que la base du segment  $AB \Gamma$  soit le cercle décrit autour du diamètre  $AB$ , et que son sommet soit le point  $\Gamma$ ; que la base du segment  $EZH$  soit le cercle décrit autour du diamètre  $EZ$ , et que son sommet soit le point  $H$ . Il faut construire un segment qui soit égal au segment  $AB \Gamma$  et semblable au segment  $EZH$ .

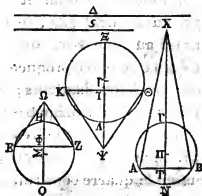
Supposons que ce segment soit trouvé, et que ce soit le segment  $\Theta\Lambda$  qui a pour base le cercle décrit autour du diamètre  $\Theta\kappa$ , et pour sommet le point  $\Lambda$ . Soient aussi dans



ces sphères les cercles  $\Lambda\text{NB}\Gamma$ ,  $\Theta\kappa\Lambda$ ,  $\text{EOZH}$ , dont les diamètres  $\Gamma\text{N}$ ,  $\Lambda\Xi$ ,  $\text{H}\Theta$  soient perpendiculaires sur la base du segment, et dont les centres soient les points  $\Pi$ ,  $\text{P}$ ,  $\Sigma$ . Faisons en sorte que la somme des droites  $\Pi\text{N}$ ,  $\text{NT}$  soit à la droite  $\text{NT}$  comme  $\text{XT}$  est à  $\text{TT}$ ; que la somme des droites  $\text{P}\Xi$ ,  $\Xi\Gamma$  soit à la droite  $\Xi\Gamma$  comme  $\Upsilon\Gamma$  est à  $\Gamma\Lambda$ , et qu'enfin la somme des droites  $\Sigma\text{O}$ ,  $\text{O}\Phi$  soit à  $\text{O}\Phi$  comme  $\Omega\Phi$  est à  $\Phi\text{H}$ . Concevons des cônes qui aient pour bases les cercles décrits autour des diamètres  $\text{AB}$ ,  $\Theta\kappa$ ,  $\text{EZ}$ , et pour sommets les points  $\text{x}$ ,

$\varphi$ ,  $\Omega$ . Le cône  $ABX$  sera égal au segment sphérique  $AB\Gamma$ , le cône  $\varphi\Theta K$  égal au segment sphérique  $\Theta K\Lambda$ , et enfin le cône  $E\Omega Z$  égal au segment sphérique  $E\Omega Z$ , ce qui a été démontré (2, 3). Puisque le segment sphérique  $AB\Gamma$  est égal au segment  $\Theta K\Lambda$ , le cône  $AXB$  sera aussi égal au cône  $\varphi\Theta K$ . Mais les bases des cônes égaux sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs; donc le cercle décrit autour du diamètre  $AB$  est au cercle décrit autour du diamètre  $\Theta K$  comme  $\varphi r$  est à  $x\Gamma$ . Mais le premier cercle est au second comme le carré construit sur  $AB$  est au carré construit sur  $\Theta K$ ; donc le carré construit sur  $AB$  est au carré construit sur  $\Theta K$  comme  $\varphi r$  est à  $x\Gamma$ . Mais le segment  $E\Omega Z$  est semblable au segment  $\Theta K\Lambda$ ; donc le cône  $E\Omega Z$  est aussi semblable au cône  $\varphi\Theta K$ , ce qui sera démontré (2); donc  $\Omega\Theta$  est à  $E\Omega$  comme  $\varphi r$  est à  $\Theta K$ . Mais la raison de  $\Omega\Theta$  à  $E\Omega$  est donnée; donc la raison de  $\varphi r$  à  $\Theta K$  est aussi donnée. Que cette dernière raison soit la même que celle de  $x\Gamma$  à  $\Delta$ . Puisque la droite  $x\Gamma$  est donnée, la droite  $\Delta$  est aussi donnée. Mais  $\varphi r$  est à  $x\Gamma$ , c'est-à-dire, le carré construit sur  $AB$  est au carré construit sur

$\Theta K$  comme  $\Theta K$  est à  $\Delta$  ; donc si nous supposons que la surface comprise sous  $AB$ ,  $\tau$  soit égale au quarré construit sur  $\Theta K$ , le quarré construit sur  $AB$  sera au quarré construit sur



$\Theta K$  comme  $AB$  est à  $\tau$ . Mais on a démontré que le quarré construit sur  $AB$  est au quarré construit sur  $\Theta K$  comme  $\Theta K$  est à  $\Delta$  ; donc, par permutation, la droite  $AB$  est à la droite  $\Theta K$  comme  $\tau$  est à  $\Delta$ . Mais  $AB$  est à  $\Theta K$  comme  $\Theta K$  est à  $\tau$  ; parce que la surface comprise sous  $AB$ ,  $\tau$  est égale au quarré construit sur  $\Theta K$  ; donc  $AB$  est à  $\Theta K$  comme  $\Theta K$  est à  $\tau$ , et comme  $\tau$  est à  $\Delta$ . Donc les droites  $\Theta K$ ,  $\tau$  sont deux moyennes proportionnelles entre  $AB$ ,  $\Delta$ .

On construira ce problème de cette ma-

nière. Soient deux segmens sphériques  $AB\Gamma$ ,  $EZH$ ; que  $AB\Gamma$  soit celui auquel il faut construire un segment égal, et  $EZH$  celui auquel il faut construire un segment semblable. Soient les grands cercles  $ATBN$ ,  $HEO\Xi$ ; que  $\Gamma N$ ,  $HO$  soient leurs diamètres, et  $\Pi$ ,  $\Sigma$  leurs centres. Faisons en sorte que la somme des droites  $\Pi N$ ,  $NT$  soit à la droite  $NT$  comme  $XT$  est à  $\Pi T$ ; et que la somme des droites  $\Sigma O$ ,  $O\Phi$  soit à  $O\Phi$  comme  $\Omega\Phi$  est à  $\Phi H$ . Le cône  $XAB$  sera égal au segment sphérique  $AB\Gamma$ , et le cône  $Z\Omega E$  sera égal au segment sphérique  $EZH$ . Faisons en sorte que  $\Omega\Phi$  soit à  $EZ$  comme  $XT$  est à  $\Delta$ ; entre les deux droites  $AB$ ,  $\Delta$ , prenons deux moyennes proportionnelles  $\Theta K$ ,  $\Upsilon$ , de manière que  $AB$  soit à  $\Theta K$  comme  $\Theta K$  est à  $\Upsilon$ , et comme  $\Upsilon$  est à  $\Delta$ . Sur  $\Theta K$  construisons un segment circulaire  $\Theta K\Delta$  semblable au segment circulaire  $EZH$ ; achevons le cercle, et que son diamètre soit  $\Lambda \Xi$ . Concevons enfin une sphère dont  $\Lambda \Theta \Xi K$  soit un grand cercle; et dont le centre soit le point  $P$ ; et par la droite  $\Theta K$ , faisons passer un plan perpendiculaire sur  $\Lambda \Xi$ . Le segment sphérique construit du côté où est la lettre  $\Lambda$  sera semblable au segment sphérique  $EZH$ , puisque

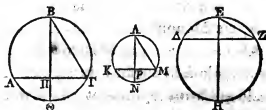
les segmens circulaires sont semblables. Je dis aussi que ce segment sphérique sera égal au segment  $AB\Gamma$ . Faisons en sorte que la somme des droites  $P\Xi$ ,  $\Xi\Upsilon$  soit à la droite  $\Xi\Upsilon$  comme  $\Psi\Upsilon$  est à  $\Upsilon\Lambda$ . Le cône  $\Psi\Theta K$  sera égal au segment sphérique  $\Theta K\Lambda$  (2, 3). Mais le cône  $\Psi\Theta K$  est semblable au cône  $Z\Omega E$ ; donc la droite  $\Omega\Phi$  est à la droite  $EZ$ , c'est-à-dire, la droite  $X\Upsilon$  est à  $\Delta$  comme  $\Psi\Upsilon$  est à  $\Theta K$ . Donc, par permutation, et par inversion, la droite  $\Psi\Upsilon$  est à  $X\Upsilon$  comme  $\Theta K$  est à  $\Delta$ . Mais les droites  $AB$ ,  $K\Theta$ ,  $\Upsilon$ ,  $\Delta$  sont tour à tour proportionnelles (6); donc le quarré construit sur  $AB$  est au quarré construit sur  $\Theta K$  comme  $\Theta K$  est à  $\Delta$ . Mais la droite  $\Theta K$  est à la droite  $\Delta$  comme  $\Psi\Upsilon$  est à  $X\Upsilon$ ; donc le quarré construit sur  $AB$  est au quarré construit sur  $K\Theta$ , c'est-à-dire, le cercle décrit autour du diamètre  $AB$  est au cercle décrit autour du diamètre  $\Theta K$  comme  $\Psi\Upsilon$  est à  $X\Upsilon$ ; donc le cône  $XAB$  est égal au cône  $\Psi\Theta K$ . Donc le segment sphérique  $AB\Gamma$  est aussi égal au segment sphérique  $\Theta K\Lambda$ . Donc on a construit un segment sphérique  $\Theta K\Lambda$  égal au segment donné  $AB\Gamma$ , et semblable à l'autre segment sphérique donné  $EZH$  (7).



## PROPOSITION VII.

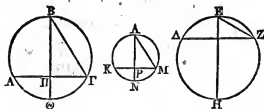
Étant donnés deux segmens de la même sphère, ou de différentes sphères, trouver un segment sphérique qui soit semblable à l'un des deux et qui ait une surface égale à celle de l'autre.

Soient deux segmens sphériques construits dans les portions de circonférence  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ ; que le segment construit dans la portion de circonférence  $AB\Gamma$  soit celui auquel le segment qu'il faut trouver doit être semblable;



et que le segment construit dans la portion de circonférence  $\Delta EZ$  soit celui à la surface duquel la surface du segment qu'il faut trouver doit être égale. Supposons que cela soit fait. Que le segment sphérique  $KAM$  soit semblable au segment  $AB\Gamma$  et que la surface de ce segment soit égale à la surface du segment

$\Delta EZ$ . Concevons les centres de ces sphères ; par leurs centres conduisons des plans perpendiculaires sur les bases de ces segmens ; que les sections des sphères soient les grands cercles  $KAMN$ ,  $BA\Theta\Gamma$ ,  $EZH\Delta$  ; que  $KM$ ,  $A\Gamma$ ,  $\Delta Z$ ,



soient dans les bases des segmens, et enfin que dans ces sphères les diamètres perpendiculaires sur  $KM$ ,  $A\Gamma$ ,  $\Delta Z$  soient les droites  $AN$ ,  $B\Theta$ ,  $EH$ . Menons les droites  $AM$ ,  $B\Gamma$ ,  $EZ$ . Puisque la surface du segment<sup>s</sup> sphérique  $KAM$  est égale à la surface du segment  $\Delta EZ$ , le cercle qui a un rayon égal à la droite  $MA$  sera égal au cercle qui a un rayon égal à la droite  $EZ$ , parce que nous avons démontré que les surfaces des segmens dont nous venons de parler sont égales à des cercles qui ont des rayons égaux aux droites menées des sommets des segmens aux circonférences de leurs bases (1, 48). Donc la droite  $MA$  est aussi égale à la droite  $EZ$ . Mais puisque le

segment  $KAM$  est semblable au segment  $AB\Gamma$ , la droite  $PA$  est à la droite  $PN$  comme  $B\Pi$  est à  $\Pi\Theta$ ; et par inversion et par addition, la droite  $NA$  est à la droite  $AP$  comme  $\Theta B$  est à  $B\Pi$ . Mais  $PA$  est à  $AM$  comme  $B\Pi$  est à  $\Gamma B$ , à cause des triangles semblables  $\Delta MP$ ,  $B\Pi\Gamma$ ; donc  $NA$  est à  $AM$ , c'est-à-dire, à  $EZ$  comme  $\Theta B$  est à  $\Gamma B$  et par permutation..... Mais la raison de la droite  $EZ$  à la droite  $\Gamma B$  est donnée, puisque ces deux droites sont données; donc la raison de  $AN$  à  $B\Theta$  est aussi donnée. Mais la droite  $B\Theta$  est donnée; donc la droite  $AN$  est aussi donnée. Donc la sphère est donnée.

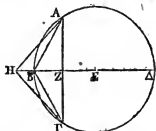
On construira le problème de cette manière. Soient  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$  les deux segments donnés; que  $AB\Gamma$  soit le segment auquel celui qu'il faut trouver doit être semblable, et que  $\Delta EZ$  soit le segment à la surface duquel la surface de celui qu'il faut trouver doit être égale. Que la construction soit la même que dans la première partie; et faisons en sorte que  $\Gamma B$  soit à  $EZ$  comme  $B\Theta$  est à  $NA$ ; décrivons un cercle autour du diamètre  $AN$ ; et enfin concevons une sphère dont  $AKNM$  soit un grand cercle. Coupons la droite  $NA$

au point  $P$ , de manière que  $OP$  soit à  $PB$  comme  $NP$  est à  $PA$ ; coupons le cercle  $AKNM$  au point  $P$  par un plan perpendiculaire sur la droite  $AN$ ; et menons la droite  $AM$ . Les segmens circulaires appuyés sur les droites  $KM$ ,  $AT$  sont semblables. Donc les segmens sphériques sont aussi semblables. Mais  $OB$  est à  $BP$  comme  $NA$  est à  $AP$ , car cela s'en-suit de la construction, et  $PB$  est à  $BT$  comme  $PA$  est à  $AM$ ; donc la droite  $OB$  est à  $NA$  comme  $BT$  est à  $AM$ . Mais  $OB$  est à  $NA$  comme  $BT$  est à  $EZ$ ; donc  $EZ$  est égal à  $AM$ . Donc le cercle qui a pour rayon la droite  $EZ$  est égal au cercle qui a un rayon égal à la droite  $AM$ . Mais le cercle qui a pour rayon la droite  $EZ$  est égal à la surface du segment  $\Delta EZ$ ; et le cercle qui a un rayon égal à la droite  $AM$  est égal à la surface du segment  $KAM$ , ainsi que cela a été démontré dans le premier livre (1, 48). Donc la surface du segment sphérique  $KAM$  est égale à la surface du segment  $\Delta EZ$ ; et ce même segment  $KAM$  est semblable au segment  $ABT$ .

## PROPOSITION VIII.

Couper un segment d'une sphère par un plan de manière que la raison de ce segment au cône qui a la même base et la même hauteur que ce segment, soit égale à une raison donnée.

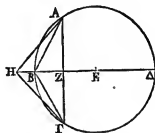
Que la sphère donnée soit celle dont  $AB\Gamma\Delta$  est un grand cercle, et  $B\Delta$  le diamètre. Il faut couper la sphère par un plan conduit par  $AT$  de manière que la raison du seg-



ment  $AB\Gamma$  au cône  $AB\Gamma$  soit égale à une raison donnée.

Supposons que cela soit fait. Que le point  $E$  soit le centre de la sphère. Que la somme des droites  $E\Delta$ ,  $\Delta Z$  soit à  $\Delta Z$  comme  $HZ$  est à  $ZB$ ; le cône  $AHT$  sera égal au segment  $AB\Gamma$  (2, 3). Donc la raison du cône  $AHT$  au cône  $AB\Gamma$  est

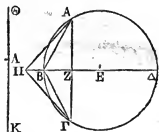
donnée. Donc la raison de HZ à ZB est aussi donnée. Mais HZ est à ZB comme la somme des droites  $\epsilon\Delta$ ,  $\Delta Z$  est à la droite  $\Delta Z$ ; donc la raison de la somme des droites  $\epsilon\Delta$ ,  $\Delta Z$  à la



droite  $\Delta Z$  est donnée, et par conséquent la raison de  $E\Delta$  à  $\Delta Z$ . Donc la droite  $\Delta Z$  est donnée, et par conséquent la droite  $AT$ . Mais la raison de la somme des droites  $E\Delta$ ,  $\Delta Z$  à la droite  $\Delta Z$  est plus grande que la raison de la somme des droites  $E\Delta$ ,  $\Delta B$  à la droite  $\Delta B$ ; et la somme des droites  $E\Delta$ ,  $\Delta B$  est égale à la droite  $E\Delta$  prise trois fois, et enfin la droite  $\Delta B$  est égale à la droite  $E\Delta$  prise deux fois. Donc la raison de la somme des droites  $E\Delta$ ,  $\Delta Z$  à  $\Delta Z$  est plus grande que la raison de trois à deux. Mais la raison de la somme des droites  $E\Delta$ ,  $\Delta Z$  à la droite  $\Delta Z$  est la même que la raison donnée. Il faut donc, pour que la construction soit pos-

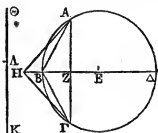
sible, que la raison donnée soit plus grande que la raison de trois à deux.

On construira le problème de cette manière. Que la sphère donnée soit celle dont  $AB\Gamma\Delta$  est un grand cercle, la droite  $B\Delta$  le diamètre, et le point  $E$  le centre; que la raison donnée soit la même que celle de  $\kappa\theta$  à  $\kappa\lambda$ , et que cette raison soit plus grande



que celle de trois à deux. Mais trois sont à deux comme la somme des droites  $E\Delta$ ,  $\Delta B$  est à la droite  $\Delta B$ ; donc la raison de  $\theta\kappa$  à  $\kappa\lambda$  est plus grande que la raison de la somme des droites  $E\Delta$ ,  $\Delta B$  à la droite  $\Delta B$ . Donc, par soustraction, la raison de  $\theta\lambda$  à  $\lambda\kappa$  est plus grande que la raison de  $E\Delta$  à  $\Delta B$ . Faisons en sorte que  $\theta\lambda$  soit à  $\lambda\kappa$  comme  $E\Delta$  est à  $\Delta Z$ ; par le point  $Z$ , menons la droite  $AZ\Gamma$  perpendiculaire sur  $B\Delta$ , et par la droite  $A\Gamma$ ,

conduisons un plan perpendiculaire sur  $BA$ . Je dis que la raison du segment sphérique  $AB\Gamma$  au cône  $AB\Gamma$  est la même que la raison de  $\Theta\kappa$  à  $\kappa\Lambda$ . Car faisons en sorte que la somme



des droites  $EA$ ,  $\Delta Z$  soit à la droite  $\Delta Z$  comme  $HZ$  est à  $ZB$ ; le cône  $GAH$  sera égal au segment sphérique  $AB\Gamma$  (2, 3). Mais  $\Theta K$  est à  $\kappa\Lambda$  comme la somme des droites  $EA$ ,  $\Delta Z$  est à la droite  $\Delta Z$ , c'est-à-dire comme  $HZ$  est à  $ZB$ , c'est-à-dire comme le cône  $AHG$  est au cône  $AB\Gamma$  (2, 3); et le cône  $AHG$  est égal au segment sphérique  $AB\Gamma$ . Donc le segment  $AB\Gamma$  est au cône  $AB\Gamma$  comme  $\Theta K$  est à  $\kappa\Lambda$ .

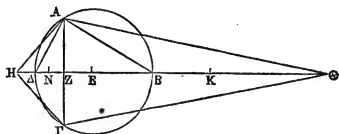
### PROPOSITION IX.

Si une sphère est coupée par un plan qui ne passe pas par le centre ; la raison du grand segment au petit sera moindre que la raison



doublée de la surface du grand segment à la surface du petit segment, et plus grande que la raison sesquialtère ( $\alpha$ ).

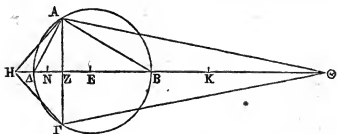
Soit une sphère ; que  $AB\Gamma\Delta$  soit un de ses



grands cercles , et  $BA$  le diamètre de ce cercle ; par la droite  $Ar$  , conduisons un plan perpendiculaire sur le cercle  $AB\Gamma\Delta$  , et que  $AB\Gamma$  soit le plus grand segment. Je dis que la raison du segment  $AB\Gamma$  au segment  $A\Delta\Gamma$  est moindre que la raison doublée de la surface du grand segment à la surface du petit , et plus grande que la raison sesquialtère.

Menons les droites  $BA$  ,  $A\Delta$  ; que le centre soit le point  $E$  ; et faisons en sorte que la somme des droites  $E\Delta$  ,  $\Delta Z$  soit à la droite  $\Delta Z$  comme  $E\Theta Z$  est à  $ZB$  ; et que la somme des droites  $EB$  ,  $BZ$  soit à la droite  $BZ$  comme  $HZ$  est à  $Z\Delta$ . Concevons deux cônes qui aient pour base le cercle décrit autour du dia-

mètre  $AR$ , et leurs sommets aux points  $\Theta$ ,  $H$ . Le cône  $A\Theta R$  sera égal au segment  $ABR$ , et le cône  $AHR$  égal au segment  $A\Delta R$  (2, 3). Mais le quarré construit sur  $BA$  sera au quarré



construit sur  $A\Delta$  comme la surface du segment  $ABR$  est à la surface du segment  $A\Delta R$ ; ainsi que cela a été démontré plus haut (1, 48); il faut donc démontrer que la raison du grand segment au petit segment est moindre que la raison doublée de la surface du grand segment à la surface du petit segment : ou ce qui est la même chose, il faut démontrer que la raison du cône  $A\Theta R$  au cône  $AHR$ , c'est-à-dire que la raison de  $z\Theta$  à  $zH$  est moindre que la raison doublée du quarré construit sur  $BA$  au quarré construit sur  $A\Delta$ , c'est-à-dire que la raison doublée de  $BZ$  à  $Z\Delta$ .

Puisque la somme des droites  $E\Delta$ ,  $\Delta Z$  est à la droite  $\Delta Z$  comme  $\Theta Z$  est à  $ZB$ , et que

la somme des droites  $EB$ ,  $BZ$  est à la droite  $BZ$  comme  $ZH$  est à  $Z\Delta$ , la droite  $BZ$  sera à la droite  $Z\Delta$  comme  $EB$  est à  $BE$  (6), la droite  $BE$  étant égale à la droite  $E\Delta$ ; cela a été démontré dans les théorèmes précédens. De plus, puisque la somme des droites  $EB$ ,  $BZ$  est à la droite  $BZ$  comme  $HZ$  est à  $Z\Delta$ , si nous faisons  $BK$  égal à  $BE$ , il est évident que  $EB$  sera plus grand que  $BE$ , à cause que  $BZ$  est plus grand que  $Z\Delta$  (7); et la droite  $KZ$  sera à la droite  $ZB$  comme  $HZ$  est à  $Z\Delta$  (8). Mais nous avons démontré que  $ZB$  est à  $Z\Delta$  comme  $EB$  est à  $BE$ , et la droite  $BE$  est égale à la droite  $KB$ ; donc  $EB$  est à  $BK$  comme  $KZ$  est à  $ZH$ . Mais la raison de  $EZ$  à  $ZK$  est moindre que la raison de  $EB$  à  $BK$  (9), et nous avons démontré que  $EB$  est à  $BK$  comme  $KZ$  est à  $ZH$ ; donc la raison de  $EZ$  à  $ZK$  est moindre que la raison de  $KZ$  à  $ZH$ . Donc la surface comprise sous  $EZ$ ,  $ZH$  est plus petite que le carré construit sur  $ZK$ . Donc la raison de la surface comprise sous  $EZ$ ,  $ZH$  au carré construit sur  $ZH$ , c'est-à-dire la raison de  $ZE$  à  $ZH$  est moindre que la raison du carré construit sur  $KZ$  au carré construit sur  $ZH$ . Mais la raison du carré construit sur  $KZ$

au quarré construit sur  $ZH$  est doublée de la raison de  $KZ$  à  $ZH$ ; donc la raison de  $\Theta Z$  à  $ZH$  est moindre que la raison doublée de  $KZ$  à  $ZH$ . Mais  $KZ$  est à  $ZH$  comme  $BZ$  est à  $Z\Delta$ ; donc la raison de  $\Theta Z$  à  $ZH$  est moindre que la raison doublée de  $BZ$  à  $Z\Delta$ , et c'est là ce que nous cherchions.

Puisque  $BE$  est égal à  $E\Delta$ , la surface comprise sous  $BZ$ ,  $Z\Delta$  sera plus petite que la surface comprise sous  $BE$ ,  $E\Delta$  ( $\zeta$ ). Donc la raison de  $BZ$  à  $BE$  est moindre que la raison de  $E\Delta$  à  $\Delta Z$ , c'est-à-dire que la raison de  $\Theta B$  à  $BZ$ . Donc le quarré construit sur  $ZB$  est moindre que la surface comprise sous  $\Theta B$ ,  $BE$ , c'est-à-dire que la surface comprise sous  $\Theta B$ ,  $BK$ . Que le quarré construit sur  $BN$  soit égal à la surface comprise sous  $\Theta B$ ,  $BK$ ; la droite  $\Theta B$  sera à la droite  $BK$  comme le quarré construit sur  $\Theta N$  est au quarré construit sur  $NK$  ( $\theta$ ). Mais la raison du quarré construit sur  $\Theta Z$  au quarré construit sur  $ZK$  est plus grande que la raison du quarré construit sur  $\Theta N$  au quarré construit sur  $NK$ ; donc aussi la raison du quarré construit sur  $\Theta Z$  au quarré construit sur  $ZK$  est plus grande que la raison de  $\Theta B$  à  $BK$ , c'est-à-dire que

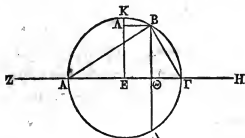
la raison de  $\Theta B$  à  $BE$ , c'est-à-dire que la raison de  $kz$  à  $ZH$ . Donc la raison de  $\Theta Z$  à  $ZH$  est plus grande que la raison sesquialtère de  $kz$  à  $ZH$ , ce que nous démontrerons à la fin (i). Mais  $\Theta Z$  est à  $ZH$  comme le cône  $A\Theta r$  est au cône  $AHr$ , c'est-à-dire comme le segment  $ABr$  est au segment  $A\Delta r$ . Mais  $kz$  est à  $ZH$  comme  $BZ$  est à  $Z\Delta$ ; c'est-à-dire comme le quarré construit sur  $B\Delta$  est au quarré construit sur  $A\Delta$ ; c'est-à-dire comme la surface du segment  $ABr$  est à la surface du segment  $A\Delta r$ ; donc la raison du grand segment au petit segment est moindre que la raison doublée de la surface du grand segment à la surface du petit segment, et plus grande que la raison sesquialtère.

#### AUTREMENT (x).

Soit la sphère dont  $AB\Gamma\Delta$  est un grand cercle, la droite  $Ar$  le diamètre, et le point  $E$  le centre; et que cette sphère soit coupée par un plan conduit par  $B\Delta$  et perpendiculaire sur  $Ar$ . Je dis que la raison du grand segment  $\Delta AB$  au petit  $B\Gamma\Delta$  est moindre que la raison doublée de la surface du segment  $AB\Delta$

à la surface du segment  $B\Gamma\Delta$ , et plus grande que la raison sesquialtère.

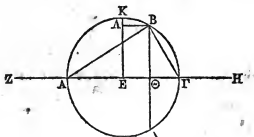
Menons les droites  $AB$ ,  $BT$ . La raison de la surface du segment  $AB\Delta$  à la surface



du segment  $B\Gamma\Delta$  est égale à la raison du cercle qui a pour rayon la droite  $AB$  au cercle qui a pour rayon la droite  $BT$ , c'est-à-dire à la raison de  $AE$  à  $OT$ . Supposons que chacune des droites  $AZ$ ,  $TH$  soit égale au rayon du cercle. La raison du segment  $BAC$  au segment  $B\Gamma\Delta$  est composée de la raison du segment  $BAC$  au cône qui a pour base le cercle décrit autour du diamètre  $B\Delta$  et pour sommet le point  $A$ , de la raison du même cône au cône qui a la même base et qui a pour sommet le point  $T$ , et enfin de la raison du cône dont nous venons de parler au segment  $B\Gamma\Delta$  ( $\lambda$ ). Mais la raison du segment  $BAC$  au cône  $BAC$  est la même que celle de  $HO$  à  $OT$ ,

la raison du cône  $B\Delta\Delta$  au cône  $B\Gamma\Delta$  est la même que celle de  $A\Theta$  à  $\Theta\Gamma$ , et enfin la raison du cône  $B\Gamma\Delta$  au segment  $B\Gamma\Delta$  est la même que la raison de  $A\Theta$  à  $\Theta Z$  : et de plus la raison qui est composée de la raison de  $H\Theta$  à  $\Theta\Gamma$  et de la raison de  $A\Theta$  à  $\Theta\Gamma$  est la même que celle de la surface comprise sous  $A\Theta$ ,  $\Theta H$  au quarré construit sur  $\Theta\Gamma$  ; et la raison qui est composée de la raison de la surface comprise sous  $H\Theta$ ,  $\Theta A$  au quarré construit sur  $\Gamma\Theta$ , et de la raison de  $A\Theta$  à  $\Theta Z$  est la même que la raison de la surface comprise sous  $H\Theta$ ,  $\Theta A$  et multipliée par  $\Theta A$  au quarré construit sur  $\Theta\Gamma$  et multiplié par  $\Theta Z$  ( $\mu$ ) ; et la raison de la surface comprise sous  $H\Theta$ ,  $\Theta A$  et multipliée par  $\Theta A$  au quarré construit sur  $\Theta\Gamma$  et multiplié par  $\Theta Z$  est la même que la raison du quarré construit sur  $A\Theta$  et multipliée par  $\Theta H$  au quarré construit sur  $\Theta\Gamma$  et multiplié par  $\Theta Z$  ; et enfin la raison de la surface comprise sous  $H\Theta$ ,  $\Theta A$  et multipliée par  $\Theta A$  au quarré construit sur  $\Theta\Gamma$  et multiplié par  $\Theta H$  est la même que celle du quarré construit sur  $\Theta A$  au quarré construit sur  $\Theta\Gamma$ . Donc, puisque la raison du quarré construit sur  $\Theta A$  et multiplié par  $\Theta H$  au

quarré construit sur  $re$  et multiplié par  $ze$  est moindre que la raison  $^{\ast}$ doublée de  $Ae$  à  $er$ ; et que la raison du quarré construit sur  $Ae$  au quarré construit par  $er$  est dou-



blée de la raison de  $A\Theta$  à  $\Theta r$  ; la raison du quarré construit sur  $A\Theta$  et multiplié par  $H\Theta$  au quarré construit sur  $\Theta r$  et multiplié par  $\Theta z$  sera moindre que la raison du quarré construit sur  $A\Theta$  et multiplié par  $H\Theta$  au quarré construit sur  $r\Theta$  et multiplié par  $\Theta H$ . Il faut donc démontrer\* que le quarré construit par  $r\Theta$  et multiplié par  $z\Theta$  est plus grand que le quarré construit sur  $r\Theta$  et multiplié par  $\Theta H$  ; c'est pourquoi il faut démontrer que  $\Theta z$  est plus grand que  $\Theta H$ .

Je dis maintenant que la raison du grand segment au plus petit est plus grande que la raison sesquialtère de la surface du grand segment à la surface du petit segment. Mais



on a démontré que la raison des segmens est la même que celle du quarré construit sur  $A\Theta$  et multiplié par  $\Theta H$  au quarré construit sur  $r\Theta$  et multiplié par  $\Theta Z$ , et la raison du cube construit sur  $AB$  au cube construit sur  $Br$  est sesquialtère de la raison de la surface du grand segment à la surface du petit segment. Je dis donc que la raison du quarré construit sur  $A\Theta$  et multiplié par  $\Theta H$  au quarré construit sur  $r\Theta$  et multiplié par  $\Theta Z$  est plus grande que la raison du cube construit sur  $AB$  au cube construit sur  $Br$ , c'est-à-dire que la raison du cube construit sur  $A\Theta$  au cube construit sur  $\Theta B$ ; c'est-à-dire que la raison du quarré construit sur  $A\Theta$  au quarré construit sur  $B\Theta$ , et que la raison de  $A\Theta$  à  $\Theta B$ . Mais la raison du quarré construit sur  $A\Theta$  au quarré construit sur  $\Theta B$ , avec la raison de  $A\Theta$  à  $\Theta B$  est la même que celle du quarré construit sur  $A\Theta$  à la surface comprise sous  $r\Theta$ ,  $\Theta B$ ; et la raison du quarré construit sur  $A\Theta$  à la surface comprise sous  $r\Theta$ ,  $\Theta B$  est la même que celle du quarré construit sur  $A\Theta$  et multiplié par  $\Theta H$  à la surface comprise sous  $r\Theta$ ,  $\Theta B$  et multipliée par  $\Theta H$ . Je dis donc que la raison du quarré construit

sur  $B\Theta$  et multiplié par  $\Theta H$  au quarré construit sur  $r\Theta$  et multiplié par  $\Theta Z$  est plus grande que celle du quarré construit sur  $A\Theta$  à la surface comprise sous  $B\Theta$ ,  $\Theta r$ ; c'est-à-dire que celle du quarré construit sur  $A\Theta$  et multiplié par  $\Theta H$  à la surface comprise sous  $B\Theta$ ,  $\Theta r$  et multipliée par  $\Theta H$ . Il faut donc démontrer que le quarré construit sur  $r\Theta$  et multiplié par  $\Theta Z$  est plus petit que la surface comprise sous  $B\Theta$ ,  $\Theta r$  et multipliée par  $\Theta H$ ; ce qui est la même chose que de démontrer que la raison du quarré construit sur  $r\Theta$  à la surface comprise sous  $B\Theta$ ,  $\Theta r$  est moindre que celle de  $H\Theta$  à  $\Theta Z$ . Il faut donc démontrer que la raison de  $H\Theta$  à  $\Theta Z$  est plus grande que celle de  $r\Theta$  à  $\Theta B$ . Du point  $E$  menons la droite  $EK$  perpendiculaire sur  $EF$ , et du point  $B$  la droite  $BA$  perpendiculaire sur la droite  $EK$ . Il reste à démontrer que la raison de  $H\Theta$  à  $\Theta Z$  est plus grande que la raison de  $r\Theta$  à  $\Theta B$ . Mais la droite  $\Theta Z$  est égale à la somme des droites  $A\Theta$ ,  $KE$ ; il faut donc démontrer que la raison de  $H\Theta$  à la somme des droites  $\Theta A$ ,  $KE$ , est plus grande que la raison de  $r\Theta$  à  $\Theta B$ . C'est pourquoi ayant retranché  $r\Theta$  de  $\Theta H$  et  $EA$  qui est égale à  $B\Theta$  de

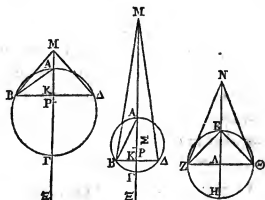
KE, il faudra démontrer que la raison de la droite restante RH à la somme des droites restantes AE, KA est plus grande que celle de RE à EB, c'est-à-dire que celle de EB à EA; c'est-à-dire que celle de AE à EA; et que, par permutation, la raison de KE à EA sera plus grande que la raison de la somme des droites KA, EA à la droite EA, et qu'enfin, par soustraction, la raison de KA à AE sera plus grande que celle de KA à EA et que par conséquent la droite AE sera plus petite que EA (v).

## PROPOSITION X.

Parmi les segmens sphériques qui ont des surfaces égales, celui qui comprend la moitié de la sphère est le plus grand.

Soit une sphère dont ABΓΔ soit un de ses grands cercles, et AR son diamètre; soit aussi une autre sphère dont EZHΘ soit un de ses grands cercles, et EH son diamètre. Que l'une soit coupée par un plan qui passe par son centre, et que l'autre soit coupée par un plan qui ne passe pas par son centre. Que les plans coupans soient perpendiculaires sur les diamètres AR, EH et que ces plans soient

conduits par les lignes  $\Delta B$ ,  $z\Theta$ . Le segment sphérique construit dans l'arc  $zE\Theta$  est la moitié de la sphère; et parmi les segmens construits dans la circonférence  $B\Delta\Delta$ , un

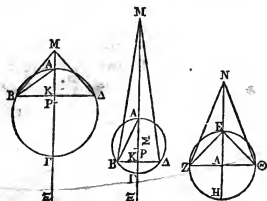


des segmens de la figure où se trouve la lettre  $z$  est plus grand que la moitié de la sphère, tandis que l'autre est plus petit que la moitié de cette même sphère. Que les surfaces des segmens dont nous venons de parler soient égales. Je dis que la demi-sphère qui est construite dans l'arc  $zE\Theta$  est plus grande que le segment construit dans l'arc  $B\Delta\Delta$ .

Car puisque les surfaces des segmens dont nous venons de parler sont égales, il est évident que la droite  $BA$  est égale à la droite  $Ez$ .

Car on a démontré que la surface d'un segment quelconque est égale à un cercle qui a un rayon égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence de sa base (1, 48). Mais dans la figure où se trouve la lettre  $\Sigma$ , l'arc  $B\Delta$  est plus grand que la moitié de la circonférence; il est donc évident que le quarré construit sur  $AB$  est moindre que le double du quarré construit sur  $AK$ , et plus grand que le double du quarré construit sur le rayon. Que la droite  $\Gamma\Xi$  soit égale au rayon du cercle  $AB\Delta$ , et faisons en sorte que  $\Gamma\Xi$  soit à  $\Gamma K$  comme  $MA$  est à  $AK$ . Sur le cercle décrit autour du diamètre  $B\Delta$ , construisons un cône qui ait son sommet au point  $M$ ; ce cône sera égal au segment sphérique qui est construit dans l'arc  $B\Delta$  (2, 3). Faisons  $EN$  égal à  $EA$ , et sur le cercle décrit autour du diamètre  $\Theta Z$  construisons un cône qui ait son sommet au point  $N$ ; ce cône sera égal à la demi-sphère construite dans l'arc  $\Theta EZ$ . Mais la surface comprise sous  $AP$ ,  $PT$  est plus grande que la surface comprise sous  $AK$ ,  $K\Gamma$ , parce que le plus petit côté de l'une de ces surfaces est plus grand que le plus petit côté de l'autre ( $\alpha$ );

et le quarré construit sur  $AP$  est égal à la surface comprise sous  $AK$ ,  $\Gamma\Xi$ , à cause que ce quarré est égal à la moitié du quarré construit sur  $AB$  (6). Donc la somme de la



surface comprise sous  $AP$ ,  $PR$  et du quarré construit sur  $AP$  est plus grande que la somme de la surface comprise sous  $AK$ ,  $K\Gamma$  et de la surface comprise sous  $AK$ ,  $\Gamma\Xi$ . Donc la surface comprise sous  $\Gamma A$ ,  $AP$  est plus grande que la surface comprise sous  $\Xi K$ ,  $KA$  (7). Mais la surface comprise sous  $MK$ ,  $K\Gamma$  est égale à la surface comprise sous  $\Xi K$ ,  $KA$ . Donc la surface comprise sous  $\Gamma A$ ,  $AP$  est plus grande que la surface comprise sous  $MK$ ,  $K\Gamma$ . Donc la raison de  $\Gamma A$  à  $\Gamma K$  est plus grande que la raison de  $MK$ , à  $AP$ . Mais la droite  $AR$  est à la

droite  $rk$  comme le quarré construit sur  $AB$  est au quarré construit sur  $BK$ ; il est donc évident que la raison de la moitié du quarré construit sur  $AB$ , qui est égal au quarré construit sur  $AP$ , au quarré construit sur  $BK$  est plus grande que la raison de la droite  $MK$  au double de  $AP$ , laquelle est égale à  $\Delta N$ . Donc la raison du cercle décrit autour du diamètre  $ez$  au cercle décrit autour du diamètre  $B\Delta$  est plus grande que la raison  $MK$  à  $\Delta A$ . Donc le cône qui a pour base le cercle décrit autour du diamètre  $ze$  et pour sommet le point  $N$  est plus grand que le cône qui a pour base le cercle décrit autour du diamètre  $B\Delta$  et pour sommet le point  $M$ . Il est donc encore évident que la demi-sphère construite dans l'arc  $Ez\theta$  est plus grande que le segment construit dans l'arc  $B\Delta\Delta$ .

FIN DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE.

---

## DE LA MESURE DU CERCLE.

---

### PROPOSITION I.

UN cercle quelconque est égal à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon de ce cercle, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence de ce même cercle.

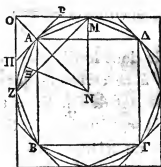
Que  $AB\Gamma\Delta$  soit le cercle proposé. Je dis que ce cercle est égal au triangle E.

Que le cercle soit plus grand, si cela est possible. Inscrivons dans ce cercle le quarré AR, et partageons les arcs en deux parties égales jusqu'à ce que la somme des segmens restans soit plus petite que l'excès du cercle sur le triangle (1, 6); on aura une figure rectiligne qui sera encore plus grande que le triangle ( $\alpha$ ). Prenons le centre N, et menons la perpendiculaire  $N\Xi$ ; la perpendiculaire  $N\Xi$  sera plus petite qu'un des côtés de l'angle droit du triangle E. Mais le contour de la figure rectiligne est encore plus petit que



l'autre côté de l'angle droit de ce même triangle, puisque le contour de cette figure est plus petit que la circonférence du cercle (1, 1). Donc la figure rectiligne est plus petite que le triangle, ce qui est absurde (6).

Que le cercle soit plus petit que le triangle E, si cela est possible. Circonscrivons un quarré à ce cercle, et partageons les arcs en deux parties égales, et par les points de division, menons des tangentes. Puisque l'angle OAP est droit, la droite



OP est plus grande que la droite MP, à cause que MP est égal à PA. Donc le triangle POR est plus grand que la moitié de la figure

OZAM (γ). Que les segmens restans soient tels que  $\Pi ZA$ ; et que la somme de ces segmens soit moindre que l'excès du triangle  $E$  sur le cercle  $AB\Gamma\Delta$ . La figure rectiligne sera encore plus petite que le triangle  $E$ : Ce qui est absurde, puisque cette figure est plus grande, à cause que  $NA$  est égale à la hauteur du triangle, et que le contour de cette figure est plus grand que la base de ce même triangle.

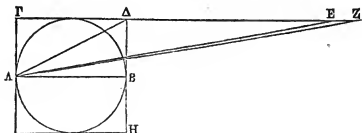
Donc le cercle est égal au triangle  $E$ .

## PROPOSITION II.

Un cercle est au quarré construit sur son diamètre, à très-peu de chose près, comme 11 est à 14.

Soit le cercle dont le diamètre est à  $AB$ . Circonscrivons à ce cercle le quarré  $\Gamma H\Delta$ ; que la droite  $\Delta E$  soit double du côté  $\Gamma\Delta$ , et que  $EZ$  en soit la septième partie. Puisque le triangle  $A\Gamma E$  est au triangle  $A\Gamma\Delta$  comme 21 est à 7, et que le triangle  $A\Gamma\Delta$  est au triangle  $\Delta E Z$  comme 7 est à 1, le triangle  $A\Gamma Z$  sera au triangle  $A\Gamma\Delta$  comme 22 est à 7. Mais le quarré  $\Gamma H$  est quadruple du triangle  $A\Gamma\Delta$ ;

donc le triangle  $ARZ$  est au carré de  $IH$  comme 22 est à 28; ou comme 11 est à 14. Mais le triangle  $ARZ$  est égal au cercle  $AB$ , puisque la hauteur  $AR$  est égale au rayon



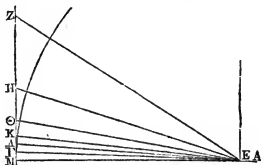
du cercle, et que sa base est égale à la circonférence du même cercle, cette circonférence étant, à peu de chose près, égale au triple du diamètre réuni au septième de ce diamètre, ainsi que cela sera démontré; donc le cercle est au carré  $IH$ , à très-peu de chose près, comme 11 est à 14.

### PROPOSITION III.

La circonférence d'un cercle quelconque est égale au triple du diamètre réuni à une certaine portion du diamètre, qui est plus petite que le septième de ce diamètre, et

plus grande que les  $\frac{10}{71}$  de ce même diamètre.

Soit le cercle dont  $AR$  est le diamètre et dont le point  $E$  est le centre; que la droite



$RAZ$  soit une tangente, et que l'angle  $ZER$  soit la troisième partie d'un angle droit. La droite  $EZ$  sera à la droite  $ZR$  comme 306 est à 153; et la raison de  $ER$  à  $RZ$  sera plus grande que la raison de 265 à 153 ( $\alpha$ ).

Partageons l'angle  $ZER$  en deux parties égales par la droite  $EH$ ; la droite  $ZE$  sera à la droite  $ER$  comme  $ZH$  est à  $HR$ . Donc, par permutation et par addition, la somme des droites  $ZE$ ,  $ER$  est à la droite  $ZR$  comme  $ER$  est à  $RH$ . Donc la raison de la droite  $RE$  à la droite  $RH$  est plus grande que la raison de 571 à 153. Donc la raison du carré de  $EH$  au carré de  $HR$  est plus grande que la rai-

son de 349450 à 23409, et la raison de EH à HR plus grande que la raison de 591  $\frac{1}{8}$  à 153 (6).

Partageons l'angle HER en deux parties égales par la droite EO; la raison de ER à EO sera plus grande que la raison de 1162  $\frac{1}{8}$  à 153. Donc la raison de OE à OR est plus grande que la raison de 1172  $\frac{1}{8}$  à 153.

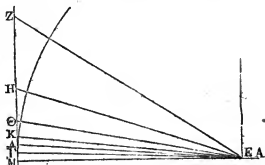
Partageons encore l'angle OER en deux parties égales par la droite EK; la raison de ER à EK sera plus grande que la raison de 2334  $\frac{1}{4}$  à 153. Donc la raison de EK à KR est plus grande que la raison de 2339  $\frac{1}{4}$  à 153.

Partageons enfin l'angle KER en deux parties égales par la droite AE; la raison de ER à AR sera plus grande que la raison de 4673  $\frac{1}{2}$  à 153.

Donc, puisque l'angle ZER qui est la troisième partie d'un angle droit, a été partagé quatre fois en deux parties égales, l'angle AER sera la quarante-huitième partie d'un angle droit. Construisons au point E un angle TEM égal à l'angle AER et prolongeons ZE vers le point M; l'angle AEM sera la vingt-quatrième partie d'un angle droit. Donc la

droite  $\Delta M$  est le côté d'un polygone de 96 côtés, circonscrit au cercle.

Donc, puisque nous avons démontré que la raison de  $ER$  à  $EA$  est plus grande que la

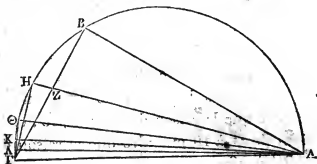


raison de  $4673 \frac{1}{2}$  à 153, et à cause que  $AR$  est double de  $ER$ , et  $\Delta M$  double de  $EA$ , la raison de  $AR$  à  $\Delta M$  sera encore plus grande que la raison de  $4673 \frac{1}{2}$  à 153. Donc la raison de la droite  $AR$  au contour d'un polygone de 96 côtés est plus grande que la raison de  $4673 \frac{1}{2}$  à 14688.

Donc la raison du contour de ce polygone à son diamètre est moindre que la raison de 14688 à  $4673 \frac{1}{2}$ . Mais parmi ces deux nombres, le premier contient trois fois le second avec un reste qui est de  $667 \frac{1}{2}$ , et ce reste est plus petit que la septième partie du nombre  $4673 \frac{1}{2}$ ; donc le contour du poly-

gone circonscrit contient le diamètre trois fois, plus une partie de ce diamètre qui est moindre que sa septième partie et demie. Donc, à plus forte raison, la circonférence du cercle est moindre que le triple du diamètre augmenté d'un septième et demi de ce même diamètre.

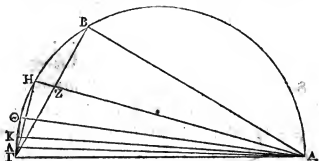
Soit le cercle dont  $AR$  est le diamètre. Que l'angle  $BAR$  soit la troisième partie d'un angle droit; la raison de  $AB$  à  $BR$  sera moindre que la raison de 1351 à 780; et la raison



de  $AR$  à  $RB$  sera la même que celle de 1560 à 780.

Partageons l'angle  $BAR$  en deux parties égales par la droite  $AH$ . Puisque l'angle  $BAH$  est non-seulement égal à l'angle  $HBP$ , mais encore à l'angle  $HAR$ , l'angle  $HFB$  sera égal à

l'angle  $HAT$ . Mais l'angle droit  $AHR$  est commun; donc le troisième angle  $HZF$  sera égal au troisième angle  $A\Gamma H$ . Donc les triangles  $AHR$ ,  $\Gamma HZ$  sont équiangles; donc  $AH$  est à  $HR$



comme  $\Gamma H$  à  $HZ$ , et comme  $A\Gamma$  est à  $\Gamma Z$ . Mais  $A\Gamma$  est à  $\Gamma Z$  comme la somme des droites  $\Gamma A$ ,  $AB$  est à la droite  $B\Gamma$ ; donc la somme des droites  $BA$ ,  $A\Gamma$  est à la droite  $B\Gamma$  comme  $AH$  est à  $HR$ . Donc la raison de  $AH$  à  $HR$  est moindre que la raison de 2911 à 780, et la raison de  $A\Gamma$  à  $\Gamma H$  moindre que la raison de 3013  $\frac{3}{4}$  à 780.

Partageons l'angle  $\Gamma AH$  en deux parties égales par la droite  $A\Theta$ ; la raison de  $A\Theta$  à  $\Theta\Gamma$  sera pareillement moindre que la raison de 5924  $\frac{3}{4}$  à 780, ou bien que la raison de 1825 à 240; car ces deux derniers nombres sont chacun les  $\frac{4}{13}$  des deux premiers. Donc



la raison de  $AR$  à  $re$  est moindre que la raison de  $1838 \frac{9}{11}$  à  $240$ .

Partageons encore l'angle  $ear$  en deux parties égales par la droite  $KA$  ; la raison de  $KA$  à  $Kr$  sera moindre que la raison de  $3661 \frac{9}{11}$  à  $240$ , ou bien que la raison de  $1007$  à  $66$  ; car ces deux derniers nombres sont chacun les  $\frac{11}{40}$  des deux premiers. Donc la raison de  $AR$  à  $rk$  est moindre que la raison de  $1009 \frac{1}{6}$  à  $66$ .

Partageons enfin l'angle  $KAR$  en deux parties égales par la droite  $AA$  ; la raison de  $AA$  à  $Ar$  sera moindre que la raison de  $2016 \frac{1}{6}$  à  $66$ , et la raison de  $AR$  à  $ra$  moindre que la raison de  $2017 \frac{1}{4}$  à  $66$ .

Donc la raison de  $AR$  à  $ra$  est plus grande que la raison de  $66$  à  $2017 \frac{1}{4}$ . Donc, la raison du contour du polygone au diamètre est plus grande que la raison de  $6336$  à  $2017 \frac{1}{4}$ . Mais parmi ces nombres, le premier contient le second trois fois avec un reste qui est plus grand que les  $\frac{10}{71}$  du second. Donc le contour d'un polygone de  $96$  côtés inscrit dans un cercle est plus grand que le triple de son diamètre augmenté des  $\frac{10}{71}$  de ce diamètre. Donc, à plus

forte raison , la circonférence du cercle est plus grande que le triple du diamètre augmenté des  $\frac{10}{71}$  de ce diamètre.

Donc , la circonférence d'un cercle est égale au triple de son diamètre augmenté d'une portion de son diamètre qui est plus petite que le septième de ce diamètre et plus grande que les  $\frac{10}{71}$  de ce même diamètre.

FIN DE LA MESURE DU CERCLE.

---

# DES CONOÏDES .

## ET DES SPHÉROÏDES.

---

ARCHIMÈDE A DOSITHÉE, SALUT.

JE t'envoie dans ce livre, non-seulement les démonstrations du reste des théorèmes qui ne se trouvoient pas parmi celles qui t'ont déjà été adressées, mais encore les démonstrations d'autres théorèmes que j'ai découverts dans la suite et qui ont tenu long-temps mon esprit incertain, parce que après les avoir examinés à plusieurs reprises, ils me paroissoient présenter beaucoup de difficultés. Voilà pourquoi ces théorèmes n'avoient pas été donnés avec les autres. Mais les ayant de nouveau considérés avec plus de soin, j'ai trouvé les solutions qui m'avoient échappé.

Ce qui restoit des premiers théorèmes

regardoit le conoïde parabolique. Quant à ceux qui ont été découverts en dernier lieu, ils regardent le conoïde hyperbolique et les sphéroïdes.

Parmi les sphéroïdes, j'appelle les uns alongés et les autres aplatis.

Relativement au conoïde parabolique, on posoit ce qui suit :

Si une parabole tourne autour de son diamètre immobile jusqu'à ce qu'elle soit revenue au même endroit d'où elle avoit commencé à se mouvoir, la figure comprise par la parabole s'appelle conoïde parabolique; le diamètre immobile s'appelle l'axe du conoïde; et le point où l'axe rencontre la surface du conoïde s'appelle le sommet du conoïde.

Si un plan touche un conoïde parabolique, et si l'on conduit un autre plan qui soit parallèle au plan tangent et qui re tranche un certain segment du conoïde, la partie du plan coupant comprise par la section du conoïde, s'appelle la base du segment qui est coupé; le point où l'autre plan touche le conoïde s'appelle le sommet, et la partie de la droite qui est menée du som-

met du segment parallèlement à l'axe du conoïde et qui est comprise dans le conoïde, s'appelle l'axe du segment.

On proposoit d'examiner ce qui suit :

Pourquoi lorsque des segmens d'un conoïde parabolique sont coupés par un plan perpendiculaire sur l'axe, le segment retranché est-il égal à trois fois la moitié d'un cône qui a la même base et le même axe que ce segment ?

Pourquoi lorsqu'un conoïde parabolique est coupé par deux plans conduits d'une manière quelconque, les segmens retranchés sont-ils entre eux en raison doublée de leurs axes ?

Relativement au conoïde hyperbolique, on proposoit ce qui suit :

Une hyperbole, son diamètre et ses asymptotes étant placés dans un même plan, si le plan dans lequel sont placées les lignes dont nous venons de parler tourne autour du diamètre immobile, jusqu'à ce qu'il soit revenu au même endroit d'où il avoit commencé à se mouvoir, il est évident que les asymptotes comprendront un cône droit dont le sommet sera le point où les asymptotes se coupent.

totes se rencontrent, et dont l'axe sera le diamètre immobile. La figure comprise par l'hyperbole s'appelle conoïde hyperbolique; le diamètre immobile s'appelle l'axe du conoïde; et le point de la surface du conoïde rencontré par l'axe s'appelle le sommet; le cône compris par les asymptotes s'appelle le cône contenant le conoïde; la droite comprise entre le sommet du conoïde et le sommet du cône s'appelle l'ajoutée à l'axe ( $\alpha$ ).

Si un plan touche un conoïde hyperbolique, et si l'on conduit un autre plan qui soit parallèle au premier et qui retranche un certain segment du conoïde, la partie du plan coupant comprise par la section du conoïde s'appelle la base du segment; le point où un des plans touche le conoïde s'appelle le sommet du segment; et la droite qui est comprise dans le segment et qui fait partie de celle qui est menée par le sommet du conoïde et par le sommet du cône qui contient le conoïde s'appelle l'axe du segment; et la droite qui est comprise entre les sommets dont nous venons de parler s'appelle l'ajoutée à l'axe.

Tous les conoïdes paraboliques sont sem-

blables; et parmi les conoïdes hyperboliques, ceux dont les cônes contenant sont semblables s'appellent semblables (6).

On propose d'examiner ce qui suit :

Pourquoi lorsqu'un conoïde hyperbolique est coupé par un plan perpendiculaire sur l'axe, le segment retranché est-il au cône qui a la même base et le même axe que le segment comme une droite composée de l'axe du segment et du triple de la droite ajoutée à l'axe\* est à une droite composée de l'axe du segment et du double de la droite ajoutée à l'axe ?

Pourquoi lorsqu'un conoïde hyperbolique est coupé par un plan non perpendiculaire sur l'axe, le segment retranché est-il à la figure qui a la même base et le même axe que le segment, et qui est un segment de cône comme une droite composée de l'axe du segment et du triple de la droite ajoutée à l'axe est à une droite composée de l'axe du segment et du double de la droite ajoutée à l'axe ?

Relativement aux sphéroïdes, nous posons ce qui suit :

Si une ellipse tourne autour de son grand

diamètre immobile jusqu'à ce qu'elle soit revenue dans le même endroit d'où elle avoit, commencé à se mouvoir, la figure produite par l'ellipse s'appelle sphéroïde alongé. Si l'ellipse tourne autour du petit diamètre immobile jusqu'à ce qu'elle soit revenue au même endroit d'où elle avoit commencé à se mouvoir, la figure qui est décrite par l'ellipse s'appelle sphéroïde aplati; et le diamètre immobile s'appelle l'axe de ces deux sphéroïdes; le point de la surface du sphéroïde rencontré par l'axe s'appelle le sommet; le milieu de l'axe s'appelle le centre; et la droite perpendiculaire sur le milieu de l'axe s'appelle le diamètre.

Si des plans parallèles touchent un de ces sphéroïdes sans le couper, et si un autre plan parallèle aux plans tangens coupe le sphéroïde, la partie du plan coupant comprise dans les sphéroïdes s'appelle la base des segmens; les points où les plans parallèles touchent le sphéroïde s'appellent les sommets; et enfin les droites qui sont comprises dans les segmens et qui font partie de la droite qui joint leurs sommets s'appellent les axes des segmens.



On démontrera que les plans qui touchent un sphéroïde ne touchent sa surface qu'en un seul point, et que la droite qui joint les points de contacts passe par le centre du sphéroïde.

On appelle sphéroïdes semblables ceux dont les axes sont proportionnels aux diamètres.

Parmi les segmens de sphéroïdes et de conoïdes, on appelle semblables ceux qui, étant retranchés de figures semblables, ont des bases semblables, et dont les axes soit qu'ils soient perpendiculaires sur les plans des bases, soit qu'ils fassent des angles égaux avec les diamètres homologues des bases ont entre eux la même raison que les diamètres homologues de leurs bases.

On propose d'examiner ce qui suit, relativement aux sphéroïdes :

Pourquoi lorsqu'un de ces sphéroïdes est coupé par un plan conduit par son centre et perpendiculaire sur l'axe, chacun des segmens produits par cette section est-il double du cône qui a la même base et le même axe que le segment ?

Pourquoi lorsqu'un de ces sphéroïdes est

coupé par un plan perpendiculaire sur l'axe, mais non mené par le centre, le plus grand des segmens produits par cette section est-il au cône qui a la même base et le même axe que ce segment comme une droite composée de la moitié de l'axe du sphéroïde et de l'axe du petit segment est à l'axe du petit segment?

Pourquoi le petit segment est-il au cône qui a la même base et le même axe que ce segment comme une droite composée du demi-axe du sphéroïde et de l'axe du grand segment est à l'axe du grand segment?

Pourquoi lorsqu'un de ces sphéroïdes est coupé par un plan mené par son centre et non perpendiculaire sur l'axe, chacun des segmens produits par cette section est-il double de la figure qui a la même base et le même axe que le segment? Cette figure est un segment de-cône.

Pourquoi lorsqu'un de ces sphéroïdes est coupé par un plan qui n'est point mené par le centre, ni perpendiculaire sur l'axe, le plus grand des segmens produits par cette section est-il à la figure qui a la même base et le même axe que le segment comme une

droite composée de la moitié de celle qui joint les sommets des segmens et de l'axe du petit segment est à l'axe du petit segment ?

Pourquoi enfin le petit segment est-il à la figure qui a la même base et le même axe que le segment comme une droite composée de la moitié de celle qui joint les sommets des segmens et de la moitié de l'axe du grand segment est à l'axe du grand segment ? Cette figure est aussi un segment de cône.

Les théorèmes dont nous venons de parler étant démontrés, à l'aide de ces théorèmes on trouve non-seulement plusieurs théorèmes, mais plusieurs problèmes. Tels sont, par exemple, les théorèmes suivans :

Les sphéroïdes semblables, et les segmens semblables des sphéroïdes et des conoïdes sont entre eux en raison triplée de leurs axes.

Les quarrés construits sur les diamètres des sphéroïdes égaux sont réciproquement proportionnels à leurs axes, et les sphéroïdes sont égaux entre eux lorsque les quarrés construits sur leurs diamètres sont réciproquement proportionnels aux axes.

Tel est aussi le problème suivant :

Un segment de sphéroïde ou de conoïde

étant donné, en retrancher un segment par un plan parallèle à un autre plan donné de manière que le segment produit par cette section soit égal à un cône, ou à un cylindre, ou à une sphère donnée.

Je vais d'abord exposer les théorèmes et tout ce qui est nécessaire pour démontrer les propositions dont je viens de parler, et j'écrirai ensuite les démonstrations de ces propositions. Sois heureux.

Si un cône est coupé par un plan qui rencontre tous ses côtés, la section sera ou un cercle ou une ellipse. Si la section est un cercle, il est évident que le segment retranché du côté du sommet sera un cône. Si la section est une ellipse, la figure retranchée du côté du sommet sera appelée un segment de cône. La base du segment sera le plan compris par l'ellipse. Son sommet sera le point qui est le sommet du cône, et son axe sera la ligne droite menée du sommet du cône au centre de l'ellipse.

Si un cylindre est coupé par deux plans parallèles qui rencontrent tous les côtés du cylindre, les sections seront ou des cercles

ou des ellipses égales et semblables entre elles. Si les sections sont des cercles, il est évident que la figure comprise entre les plans parallèles est un cylindre. Si les sections sont des ellipses, la figure comprise entre les plans parallèles sera appelée un segment de cylindre. La base du segment sera l'un ou l'autre des plans compris dans les ellipses, son axe sera la droite qui joint les centres des ellipses, et qui fait partie de l'axe du cône.

### PROPOSITION I.

Si l'on a un certain nombre de quantités inégales qui se surpassent également et dont l'excès soit égal à la plus petite, et si l'on a d'autres quantités en nombre égal dont chacune soit égale à la plus grande des premières, la somme des quantités égales sera plus petite que le double de la somme des quantités qui se surpassent également; et si l'on retranche la plus grande des quantités inégales, la somme des quantités égales sera plus grande que le double de la somme des quantités inégales restantes.

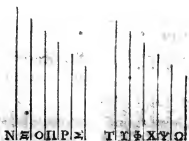
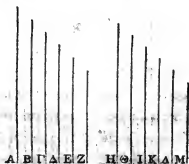
Cela est évident (*a*).

## PROPOSITION II.

Si un certain nombre de quantités sont proportionnelles deux à deux à d'autres quantités semblablement arrangées et en nombre égal; si les premières, ou seulement quelques-unes d'entre elles sont comparées avec certaines autres quantités sous des raisons quelconques; et si les secondes quantités sont aussi comparées avec certaines autres quantités correspondantes sous les mêmes raisons, la somme des premières quantités sera à la somme des quantités avec lesquelles elles sont comparées comme la somme des dernières est à la somme des quantités avec lesquelles elles sont aussi comparées ( $\alpha$ ).

Soient certaines quantités  $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$ . Que ces quantités soient proportionnelles deux à deux à d'autres quantités  $H, \Theta, I, K, \Lambda, M$ , en nombre égal; de manière que  $A$  soit à  $B$  comme  $H$  est à  $\Theta$ , que  $B$  soit à  $\Gamma$  comme  $\Theta$  est à  $I$ , et ainsi de suite. Que les quantités  $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$  soient comparées avec certaines autres quantités  $N, \Xi$ ,

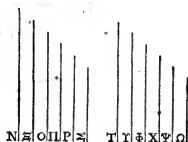
$\Theta, \Pi, \rho, \Sigma$  correspondantes sous certaines raisons; et que les quantités  $H, \Theta, I, K, \Lambda, M$  soient comparées avec certaines autres quantités correspondantes  $\tau, \gamma, \phi, \kappa, \psi, \Omega$



sous les mêmes raisons, de manière que  $A$  soit à  $N$  comme  $H$  est à  $\tau$ , et que  $B$  soit à  $\Xi$  comme  $\Theta$  est à  $\gamma$ , et ainsi de suite. Il faut démontrer que la somme des quantités  $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$  est à la somme des quantités  $N, \Xi, O, \Pi, \rho, \Sigma$  comme la somme des quan-

tités  $H, \Theta, I, K, \Lambda, M$  est à la somme des quantités  $\tau, \gamma, \phi, x, \psi, \Omega$ .

Câr puisque  $N$  est à  $A$  comme  $\tau$  est à  $H$ ; que  $A$  est à  $B$  comme  $H$  est à  $\Theta$ ; et qu'en-



fin  $B$  est à  $\Xi$  comme  $\Theta$  est à  $\tau$ , il s'ensuit que  $N$  est à  $\Xi$  comme  $\tau$  est à  $\tau$ . Pareillement  $\Xi$  sera à  $O$  comme  $\tau$  est à  $\phi$ , et ainsi de suite. Puisque la somme des quantités  $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$  est à  $A$  comme la somme des quantités  $H, \Theta, I, K, \Lambda, M$  est à  $H$ ; que  $A$  est à  $N$  comme



H est à  $\tau$ , et qu'enfin la quantité N est à la somme des quantités N,  $\Xi$ , O,  $\Pi$ , P,  $\Sigma$  comme la quantité  $\tau$  à la somme des quantités  $\tau$ ,  $\phi$ ,  $\chi$ ,  $\psi$ ,  $\Omega$ ; il est évident que la somme des quantités A, B,  $\Gamma$ ,  $\Delta$ , E, Z est à la somme des quantités N,  $\Xi$ , O,  $\Pi$ , P,  $\Sigma$  comme la somme des quantités H,  $\Theta$ , I, K,  $\Lambda$ , M est à la somme des quantités  $\tau$ ,  $\phi$ ,  $\chi$ ,  $\psi$ ,  $\Omega$ .

Si parmi les quantités A, B,  $\Gamma$ ,  $\Delta$ , E, Z, les quantités A, B,  $\Gamma$ ,  $\Delta$ , E seulement sont comparées avec les quantités N,  $\Xi$ , O,  $\Pi$ , P, la quantité Z n'étant point comparée avec une autre quantité, et si parmi les quantités H,  $\Theta$ , I, K,  $\Lambda$ , M, les quantités H,  $\Theta$ , I, K,  $\Lambda$  sont comparées avec les quantités correspondantes  $\tau$ ,  $\phi$ ,  $\chi$ ,  $\psi$ , la quantité M n'étant point comparée avec une autre quantité, il est encore évident que la somme des quantités A, B,  $\Gamma$ ,  $\Delta$ , E, Z est à la somme des quantités N,  $\Xi$ , O,  $\Pi$ , P comme la somme des quantités H,  $\Theta$ , I, K,  $\Lambda$ , M est à la somme des quantités  $\tau$ ,  $\phi$ ,  $\chi$ ,  $\psi$  (C).

## PROPOSITION III.

Si l'on a un certain nombre de lignes égales entre elles ; si l'on applique à chacune d'elles une surface dont la partie excédente soit un quarré. Si les côtés des quarrés se surpassent également et si leur excès est égal au côté du plus petit côté quarré ; si de plus , on a d'autres surfaces en même nombre que les premières et égales chacune à la plus grande de celles-ci , la raison de la somme des surfaces égales à la somme des surfaces inégales sera moindre que la raison d'une droite composée du côté du plus grand quarré et d'une des lignes égales à une droite composée du tiers du côté du plus grand quarré et de la moitié d'une des lignes égales : et la raison de la somme des surfaces égales à la somme des surfaces inégales , la plus grande exceptée , sera plus grande que cette même raison ( $\alpha$ ).

Soit un certain nombre de lignes égales désignées par  $\Lambda$  ; qu'à chacune d'elles soit appliquée une surface dont la partie excédente soit un quarré. Que les côtés  $B$  ,  $r$  ,

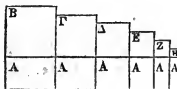
$\Delta$ , E, Z, H de ces quarrés se surpassent également entre eux; que leur excès soit égal au côté du plus petit quarré; que B soit le plus grand côté et H le plus petit. Soient



$\Theta$	$\Theta$	$\Theta$	$\Theta$	$\Theta$	$\Theta$
I	I	I	I	I	I
K	K	K	K	K	K
$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$

de plus d'autres surfaces dans chacune desquelles se trouvent les lettres  $\Theta\text{K}\Lambda$ ; que ces surfaces soient en même nombre que les premières, que chacune d'elles soit égale à la plus grande, c'est-à-dire à celle qui est appliquée sur AB. Que la ligne  $\Theta\text{I}$  soit égale à  $\Lambda$  et la ligne  $\text{K}\Lambda$  égale à B; que chacune des lignes  $\Theta\text{I}$  soit double de I et que chacune des lignes  $\text{K}\Lambda$  soit triple de K. Il faut démontrer que la raison de la somme des surfaces dans lesquelles se trouvent les lettres  $\Theta\text{K}\Lambda$  à la somme des surfaces AB,  $\text{A}\Gamma$ ,  $\text{A}\Delta$ ;

AE, AZ, AH est moindre que la raison de la ligne  $\Theta\text{IK}\Lambda$  à la ligne IK; et que la raison de la somme des surfaces égales à la somme des surfaces inégales, la plus grande excep-



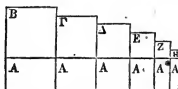
Θ	Θ	Θ	Θ	Θ	Θ
I	I	I	I	I	I
K	K	K	K	K	K
Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ

tée, est plus grande que cette même raison.

En effet, les surfaces où se trouve la lettre A se surpassent également entre elles, et leur excès est égal à la plus petite; car les surfaces appliquées sur les droites A et les largeurs de ces surfaces se surpassent également; de plus les surfaces où se trouvent les lettres  $\Theta$ I sont en même nombre que ces surfaces inégales, et chacune d'elles est égale à la plus grande de celles-ci. Donc la somme des surfaces où se trouvent les lettres  $\Theta$ I sera plus petite que le double de la somme des

surfaces où se trouve la lettre A ; et si l'on retranche la plus grande des surfaces où se trouve la lettre A , la somme des surfaces où se trouvent les lettres  $\Theta$  I sera plus grande que la somme des surfaces restantes où se trouve la lettre A (1). Donc la somme des surfaces où se trouve la lettre I est plus petite que la somme des surfaces où se trouve la lettre A , et plus grande que la somme de ces surfaces , si l'on en retranche la plus grande. On a de plus certaines lignes B ,  $\Gamma$  ,  $\Delta$  , E , Z , H qui se surpassent également et dont l'excès est égal à la plus petite , et l'on a aussi d'autres lignes où se trouvent les lettres  $\kappa$  A qui sont en même nombre que les premières , et dont chacune est égale à la plus grande de celles-ci. Donc la somme des carrés décrits sur les droites qui sont chacune égales à la plus grande , est plus petite que le triple de la somme des carrés décrits sur les droites qui se surpassent également , et si l'on retranche le carré décrit sur la plus grande ligne des droites inégales , la somme des carrés décrits sur les droites qui sont égales chacune à la plus grande des droites inégales , sera plus grande que le triple des

quarrés restans, ainsi que cela est démontré dans le livre des Hélices (*prop. 10, cor.*) (6). Donc la somme des surfaces où se trouve la lettre  $\kappa$  est plus petite que la somme des



$\Theta$	$\Theta$	$\Theta$	$\Theta$	$\Theta$	$\Theta$
I	I	I	I	I	I
$\kappa$	$\kappa$	$\kappa$	$\kappa$	$\kappa$	$\kappa$
$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$

surfaces où se trouvent les lettres  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\Delta$ ,  $E$ ,  $Z$ ,  $H$  et plus grande que la somme des surfaces où se trouvent les lettres  $\gamma$ ,  $\Delta$ ,  $E$ ,  $Z$ ,  $H$ . Donc la somme des surfaces où se trouvent les lettres  $\kappa$  est plus petite que la somme des surfaces où se trouvent les lettres  $\alpha\beta$ ,  $\alpha\gamma$ ,  $\alpha\Delta$ ,  $\alpha E$ ,  $\alpha Z$ ,  $\alpha H$  et plus grande que la somme des surfaces où se trouvent les lettres  $\alpha\gamma$ ,  $\alpha\Delta$ ,  $\alpha E$ ,  $\alpha Z$ ,  $\alpha H$ . Il est donc évident que la raison de la somme des surfaces dans lesquelles sont les lettres  $\Theta I$ ,  $\kappa\Lambda$  à la somme des surfaces dans lesquelles sont les lettres

AB, AF, AD, AE, AZ, AH est moindre que la raison de la ligne  $\Theta\Lambda$  à la ligne IK; et que si l'on retranche la surface où se trouvent les lettres AB, la première raison sera plus grande que la seconde (γ).

Si des droites menées du même point sont tangentes à une section quelconque d'un cône, et si d'autres droites parallèles à ces tangentes se coupent mutuellement dans la section du cône, les surfaces comprises sous les segmens de ces droites seront entre elles comme les quarrés des tangentes. La surface comprise sous les segmens de l'une des droites correspond au quarré de la tangente parallèle à cette droite. Cela est démontré dans les Elémens (δ).

#### PROPOSITION IV.

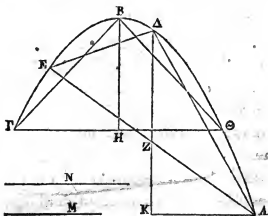
Si d'une même parabole, on retranche deux segmens quelconques qui aient des diamètres égaux, ces segmens seront égaux entre eux, ainsi que les triangles qui leur sont inscrits et qui ont la même base et la même hauteur que les segmens. J'appelle





le paramètre ( $\alpha$ ), et du point A conduisons la droite AK perpendiculaire sur  $\Delta Z$ . Puisque la droite  $\Delta Z$  est le diamètre du segment, la droite AE est coupée en deux parties égales au point Z, et cette même droite  $\Delta Z$  est parallèle au diamètre de la parabole. La droite  $\Delta Z$  coupe donc en deux parties égales toutes les parallèles à la droite AE (6). Que le carré de AZ soit au carré de AK comme N est à M. Les carrés des ordonnées parallèles à AE seront égaux aux surfaces comprises sous la droite N et sous les abscisses; ce qui est démontré dans les élémens des sections coniques (7). Le carré de AZ est donc égal à la surface comprise sous N et  $\Delta Z$ . Mais le carré de  $\Theta H$  est égal à la surface comprise sous la droite M et sous la droite BH, parce que  $\Theta H$  est perpendiculaire sur l'axe (8); donc le carré de AZ est au carré de  $\Theta H$  comme N est à M; parce que les droites  $\Delta Z$ , BH sont supposées égales. Mais le carré de AZ est au carré de AK comme N est à M; donc les droites  $\Theta H$ , AK sont égales. Mais les droites BH,  $\Delta Z$  sont aussi égales entre elles; donc la surface comprise sous  $\Theta H$ , BH est égale à la surface comprise sous AK,  $\Delta Z$ ; donc le trian-

gle  $\Theta HB$  est égal au triangle  $\Delta AZ$ ; donc leurs doubles sont aussi égaux. Mais le segment  $A\Delta E$  est égal à quatre fois le tiers du triangle  $A\Delta E$  et le segment  $\Theta BT$  égal à quatre fois le



tiers du triangle  $\Theta BT$  (*quadr. de la Parabole, prop. 24*); il est donc évident que non-seulement les segmens, mais encore les triangles inscrits dans les segmens sont égaux entre eux.

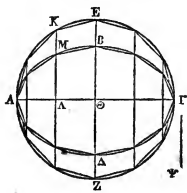
Si aucune des droites qui retranchent les segmens n'est perpendiculaire sur le diamètre, on prendra sur le diamètre de la parabole une droite égale au diamètre d'un des segmens, et l'on menera par l'extrémité de cette droite une perpendiculaire sur le dia-

mètre de la parabole. Ce nouveau segment sera égal à chacun des deux autres segmens. Donc ce qui avoit été proposé est évident.

# PROPOSITION V.

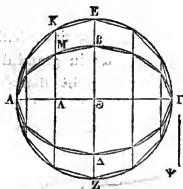
La surface comprise dans l'ellipse est au cercle décrit autour du grand diamètre de l'ellipse comme le petit diamètre est au grand, c'est-à-dire, au diamètre du cercle.

Soit l'ellipse  $AB\Gamma\Delta$  dont le grand diamètre



est la droite  $A\Gamma$  et le petit la droite  $B\Delta$ . Décrivons un cercle autour de  $A\Gamma$  comme diamètre. Il faut démontrer que la surface comprise dans l'ellipse est à ce cercle comme  $B\Delta$  est à  $\Gamma A$ , c'est-à-dire à  $EZ$ .

Que le cercle  $\Psi$  soit au cercle  $AEFZ$  comme  $BA$  est à  $EZ$ . Je dis que le cercle  $\Psi$  est égal à la surface comprise dans l'ellipse. Car si le cercle  $\Psi$  n'est pas égal à la surface comprise



dans l'ellipse, supposons d'abord qu'il soit plus grand, si cela est possible. On peut inscrire dans le cercle  $\Psi$  un polygone dont le nombre des angles soit pair et qui soit plus grand que la surface comprise dans l'ellipse  $AB\Gamma\Delta$ . Supposons qu'il soit inscrit. Inscrivons dans le cercle  $AEFZ$  un polygone semblable à celui qui est inscrit dans le cercle  $\Psi$ . Menons des angles de ce polygone des perpendiculaires sur le diamètre  $AG$ , et joignons par des droites les points où ces perpendiculaires rencontrent l'ellipse; nous aurons

un certain polygone inscrit dans l'ellipse qui sera au polygone inscrit dans le cercle  $AETZ$  comme  $B\Delta$  est à  $EZ$ . Car les perpendiculaires  $E\Theta$ ,  $K\Lambda$  étant coupées proportionnellement aux points  $M$ ,  $B$ , il est évident que le trapèze  $AE$  sera au trapèze  $\Theta M$  comme  $\Theta E$  est à  $B\Theta$  ( $\alpha$ ). Par la même raison, les autres trapèzes placés dans le cercle sont aux autres trapèzes placés dans l'ellipse chacun à chacun comme  $E\Theta$  est à  $B\Theta$ . Mais les triangles placés dans le cercle vers les points  $A$ ,  $\Gamma$  sont aussi aux triangles placés dans l'ellipse vers ces mêmes points chacun à chacun comme  $E\Theta$  sera à  $B\Theta$ . Donc le polygone entier inscrit dans le cercle sera au polygone entier inscrit dans l'ellipse comme  $EZ$  est à  $B\Delta$ . Mais le polygone inscrit dans le cercle  $AETZ$  est au polygone inscrit dans le cercle  $\Psi$  comme  $EZ$  est à  $B\Delta$ , parce que ces cercles sont entre eux comme ces polygones. Donc le polygone inscrit dans le cercle  $\Psi$  est égal au polygone inscrit dans l'ellipse: ce qui ne peut être, car on avoit supposé le polygone inscrit dans le cercle  $\Psi$  plus grand que la surface comprise dans l'ellipse.

Supposons enfin que le cercle  $\Psi$  soit plus

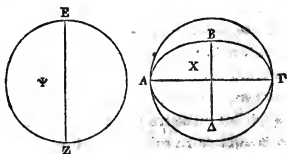
petit. On peut inscrire dans l'ellipse un polygone dont le nombre des côtés soit pair et qui soit plus grand que le cercle  $\Psi$  (6). Que ce polygone soit inscrit. Prolongeons jusqu'à la circonférence du cercle les perpendiculaires menées des angles du polygone sur le diamètre  $AG$ . On aura encore un certain polygone inscrit dans le cercle  $AETZ$  qui sera au polygone inscrit dans l'ellipse comme  $EZ$  est à  $BA$ . Inscrivons dans le cercle  $\Psi$  un polygone semblable à celui qui est inscrit dans le cercle  $AETZ$ . Nous démontrerons que le polygone inscrit dans le cercle  $\Psi$  est égal au polygone inscrit dans l'ellipse. Ce qui est impossible. Donc le cercle  $\Psi$  n'est pas plus petit que l'ellipse. Il est donc évident que la surface comprise dans l'ellipse est au cercle  $AETZ$  comme  $BA$  est à  $EZ$ .

## PROPOSITION VI

La surface comprise dans l'ellipse est à un cercle quelconque comme la surface comprise sous les deux diamètres de l'ellipse est au quarré du diamètre du cercle.

Que la surface comprise dans l'ellipse soit

celle où se trouve la lettre  $x$ . Que les diamètres de l'ellipse soient les droites  $ar$ ,  $b\Delta$  et que  $ar$  soit le plus grand. Que le cercle soit



celui où se trouve la lettre  $\Psi$ , et que son diamètre soit la droite  $EZ$ . Il faut démontrer que la surface  $x$  est au cercle  $\Psi$  comme la surface comprise sous  $ar$ ,  $b\Delta$  est au carré de  $EZ$ .

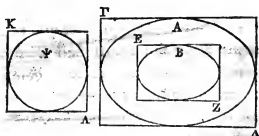
Décrivons un cercle autour de  $ar$  comme diamètre. La surface  $x$  sera au cercle dont le diamètre est la droite  $ar$  comme la surface comprise sous  $ar$ ,  $b\Delta$  est au carré de  $ar$ ; car on a démontré que l'ellipse est au cercle comme  $b\Delta$  est à  $ar$  (5). Mais le cercle qui a pour diamètre  $ar$  est au cercle qui a pour diamètre  $EZ$  comme le carré de  $ar$  est au carré de  $EZ$  ( $\alpha$ ); il est donc évident que la

surface  $x$  est au cercle  $\Psi$  comme la surface comprise sous  $AT$ ,  $B\Delta$  est au quarré de  $EZ$ .

## PROPOSITION VII.

Les surfaces comprises dans les ellipses sont entre elles comme les surfaces comprises sous leurs diamètres.

Que les surfaces comprises dans les ellipses soient celles où se trouvent les lettres  $A$ ,  $B$ . Que la surface  $\Gamma\Delta$  soit celle qui est comprise



sous les diamètres de l'ellipse qui comprend la surface  $A$  et que la surface  $EZ$  soit celle qui est comprise sous les diamètres de l'autre ellipse. Il faut démontrer que la surface  $A$  est à la surface  $B$  comme  $\Gamma\Delta$  est à  $EZ$ .

Prenons le cercle où se trouve la lettre  $\Psi$ . Que le quarré construit sur son diamètre soit  $KA$ . La surface  $A$  sera au cercle  $\Psi$  comme



$\Gamma\Delta$  est à  $\kappa\Lambda$ , et le cercle  $\Psi$  sera à la surface B comme  $\kappa\Lambda$  est à  $EZ$  (a). Il est donc évident que la surface A est à la surface B comme  $\Gamma\Delta$  est à  $EZ$ .

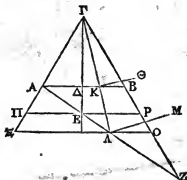
Il suit évidemment de-là que les surfaces contenues dans des ellipses semblables sont entre elles comme les quarrés des diamètres homologues.

### PROPOSITION VIII

Etant données une ellipse et une ligne élevée du centre de cette ellipse perpendiculairement sur son plan, il est possible de trouver un cône qui ait pour sommet l'extrémité de cette perpendiculaire et dans la surface duquel se trouve l'ellipse donnée.

Soient données une ellipse et une ligne élevée du centre de l'ellipse perpendiculairement sur son plan. Faisons passer un plan par cette perpendiculaire et par le petit diamètre. Que le petit diamètre soit la droite AB. Que le centre de l'ellipse soit le point  $\Delta$ ; que la perpendiculaire élevée du centre de l'ellipse soit la droite  $\Gamma\Delta$  et que son extrémité soit le point  $\Gamma$ . Supposons que l'ellipse

donnée ait été décrite autour de  $AB$  comme diamètre dans un plan perpendiculaire sur  $r\Delta$ . Il faut trouver un cône qui ait pour sommet le point  $r$  et dans la surface duquel se trouve l'ellipse donnée.



Du point  $r$  aux points  $A, B$  conduisons deux droites et que ces droites soient prolongées. Du point  $A$ , conduisons la droite  $AZ$ , de manière que la surface comprise sous  $AE, EZ$  soit au quarré de  $Er$  comme le quarré de la moitié du grand diamètre est au quarré de  $\Delta r$ ; ce qui peut se faire, parce que la raison de la surface comprise sous  $AE, EZ$  au quarré de  $Er$  est plus grande que la raison de la surface comprise sous  $A\Delta, \Delta B$  au quarré de  $\Delta r$  ( $\alpha$ ). Par la droite  $AZ$  faisons passer un plan perpendiculaire sur le plan

dans lequel se trouvent les droites  $ra$ ,  $az$ .  
 Décrivons dans ce plan un cercle autour de  
 $az$  comme diamètre; et que ce cercle soit la  
 base d'un cône qui ait pour sommet le point  
 $r$ . On démontrera que l'ellipse donnée se  
 trouve dans la surface de ce cône.

Car si l'ellipse ne se trouve pas dans la  
 surface de ce cône, il faut qu'il y ait quelque  
 point dans l'ellipse qui ne soit pas dans la  
 surface de ce cône. Supposons qu'on ait  
 pris dans l'ellipse un point quelconque  $\theta$   
 qui ne soit pas dans la surface du cône; et du  
 point  $\theta$ , conduisons  $\theta k$  perpendiculaire sur  
 $ab$ . Cette droite sera perpendiculaire sur le  
 plan  $raz$ . Du point  $r$  au point  $k$  conduisons  
 une droite et prolongeons-la jusqu'à ce  
 qu'elle rencontre  $az$  en un point  $\lambda$ , et ensuite  
 du point  $\lambda$  et dans le cercle décrit autour de  
 $az$  élevons sur  $az$  la perpendiculaire  $\lambda m$ .  
 Supposons que le point  $m$  soit dans la cir-  
 conférence de ce même cercle; et par le  
 point  $\lambda$  et le point  $e$ , conduisons les droites  
 $\lambda o$ ,  $\lambda p$  parallèles à  $ab$ . Puisque la surface  
 comprise sous  $ae$ ,  $ez$  est au quarré de  $er$   
 comme le quarré de la moitié du grand dia-  
 mètre est au quarré de  $\Delta r$ , et que le quarré



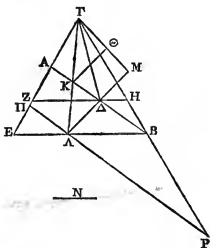
prise sous  $\kappa\Lambda$ ,  $\Lambda O$  est au quarré de  $\Gamma\Lambda$  comme la surface comprise sous  $\Lambda K$ ,  $KB$  est au quarré de  $\Gamma K$  ( $\varepsilon$ ). Donc la surface comprise sous  $\Lambda\Lambda$ ,  $\Lambda Z$  est au quarré de  $\Gamma\Lambda$  comme le quarré de  $\Theta K$  est au quarré de  $\Gamma K$ . Mais le quarré de  $\Lambda M$  est égal à la surface comprise sous  $\Lambda\Lambda$ ,  $\Lambda Z$ , car on a mené la droite  $\Lambda M$  perpendiculaire dans le demi-cercle décrit autour de  $AZ$ . Donc le quarré de  $\Lambda M$  est au quarré de  $\Lambda\Gamma$  comme le quarré de  $\Theta K$  est au quarré de  $\Gamma K$ . Donc les points  $\Gamma$ ,  $\Theta$ ,  $M$  sont dans une même droite. Mais la droite  $\Gamma M$  est dans la surface du cône; il est donc évident que le point  $\Theta$  est dans la surface du cône. Mais on avoit supposé qu'il n'y étoit pas. Il n'est donc aucun point de l'ellipse qui ne soit dans la surface du cône dont nous avons parlé. Donc l'ellipse est toute entière dans la surface de ce cône.

## PROPOSITION IX.

Étant données une ellipse et une oblique élevée de son centre dans le plan qui passe par un de ses diamètres et qui est perpendiculaire sur le plan de l'ellipse, il est pos-

sible de trouver un cône qui ait pour sommet l'extrémité de cette oblique et dans la surface duquel se trouve l'ellipse donnée.

Que la droite BA soit un des diamètres de

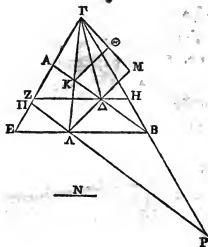


l'ellipse; que le centre soit le point  $\Delta$ , et que l'oblique élevée du centre, ainsi qu'il a été dit, soit  $\Delta r$ . Supposons que l'on ait décrit l'ellipse donnée autour de AB comme centre, dans un plan perpendiculaire sur celui où se trouvent les droites AB,  $r\Delta$ . Il faut trouver un cône qui ait son sommet au point r, et dans la surface duquel se trouve l'ellipse donnée.

Les droites Ar, rB ne sont pas égales, car

la droite  $r\Delta$  n'est pas perpendiculaire sur le plan dans lequel se trouve l'ellipse. Que la droite  $Er$  soit égale à la droite  $rB$ , et que la droite  $N$  soit égale à la moitié de l'autre diamètre qui est le diamètre conjugué de  $AB$  et par le point  $\Delta$  menons la droite  $ZH$  parallèle à  $EB$ . Par la droite  $EB$  faisons passer un plan perpendiculaire sur celui où se trouvent les droites  $Ar$ ,  $rB$ ; et autour de  $EB$  comme diamètre décrivons un cercle ou une ellipse ( $\alpha$ ). Décrivons un cercle, si le quarré de  $N$  est égal à la surface comprise sous  $Z\Delta$ ,  $\Delta H$  ( $\epsilon$ ). Si le contraire arrive, décrivons une ellipse de manière que le quarré de son autre diamètre soit au quarré de  $EB$  comme le quarré de  $N$  est à la surface comprise sous  $Z\Delta$ ,  $\Delta H$  ( $\gamma$ ). Prenons ensuite un cône dont le sommet soit le point  $r$  et dans la surface duquel se trouvent le cercle ou l'ellipse décrits autour de  $EB$  comme diamètre; ce qui est possible, parce que la droite menée du point  $r$  sur le milieu de  $EB$  est perpendiculaire sur le plan conduit par la droite  $EB$ . L'ellipse décrite autour du diamètre  $AB$  se trouvera aussi dans la surface de ce cône; car si cela n'est point, il y aura quelque point dans l'el-

lipse qui ne sera pas dans la surface du cône. Supposons donc qu'on ait pris un point quelconque  $\Theta$  dans l'ellipse qui ne soit pas dans la surface du cône; et par ce point  $\Theta$



conduisons la droite  $K\Theta$  perpendiculaire sur  $AB$ ; menons la droite  $TK$ , et prolongeons-la de manière qu'elle rencontre  $EB$  au point  $\Lambda$ . Par le point  $\Lambda$  et dans le plan perpendiculaire qui passe par  $EB$ , menons une droite  $\Lambda M$  perpendiculaire sur  $EB$ ; supposons que le point  $M$  soit dans la surface du cône et par le point  $\Lambda$  menons  $\Lambda P$  parallèle à  $AB$ . Le quarré de  $N$  sera à la surface comprise sous



$z\Delta$ ,  $\Delta H$  comme le quarré de  $\Delta M$  est à la surface comprise sous  $E\Lambda$ ,  $\Lambda B$  ( $\delta'$ ). Mais la surface comprise sous  $z\Delta$ ,  $\Delta H$  est à la surface comprise sous  $\Lambda\Delta$ ,  $\Delta B$  comme la surface comprise sous  $E\Lambda$ ,  $\Lambda B$  est à la surface comprise sous  $\Pi\Lambda$ ,  $\Lambda P$  ( $\epsilon$ ). Donc le quarré de  $N$  est à la surface comprise sous  $\Lambda\Delta$ ,  $\Delta B$  comme le quarré de  $\Delta M$  est à la surface comprise sous  $\Pi\Lambda$ ,  $\Lambda P$ . Mais le quarré de  $N$  est à la surface comprise sous  $\Lambda\Delta$ ,  $\Delta B$  comme le quarré de  $\Theta K$  est à la surface comprise sous  $AK$ ,  $KB$ ; parce que dans une même ellipse on a mené des perpendiculaires sur le diamètre  $AB$ . Donc la raison du quarré  $\Delta M$  à la surface comprise sous  $\Pi\Lambda$ ,  $\Lambda P$  est la même que la raison du quarré de  $\Theta K$  à la surface comprise sous  $AK$ ,  $KB$ . Mais la raison de la surface comprise sous  $\Pi\Lambda$ ,  $\Lambda P$  au quarré de  $\Lambda \Gamma$  est la même que la raison de la surface comprise sous  $AK$ ,  $KB$  au quarré de  $K\Gamma$ ; donc la raison du quarré de  $\Delta M$  au quarré de  $\Lambda \Gamma$  est la même que la raison du quarré de  $\Theta K$  au quarré de  $K\Gamma$ . Donc les points  $\Gamma$ ,  $\Theta$ ,  $M$  sont en ligne droite. Mais la droite  $\Gamma M$  est dans la surface du cône; donc le point  $\Theta$  est aussi dans la surface du cône. Mais on avoit supposé qu'il



dans la surface duquel se trouve l'ellipse donnée.

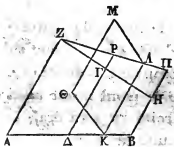
Des points  $A$ ,  $B$  menons les droites  $AZ$ ,  $BH$  parallèles à  $\Gamma\Delta$ . L'autre diamètre de l'ellipse sera ou égal à l'intervalle des droites  $AZ$ ,  $BH$ , ou plus grand, ou plus petit. Qu'il soit d'abord égal à la droite  $ZH$  menée perpendiculairement sur  $\Gamma\Delta$ . Par la droite  $ZH$ , conduisons un plan perpendiculaire sur  $\Gamma\Delta$ , et dans ce plan décrivons un cercle autour de  $ZH$  comme diamètre, et que ce cercle soit la base d'un cylindre, qui ait pour axe la droite  $\Gamma\Delta$ . L'ellipse donnée sera dans la surface de ce cylindre. Car si elle n'y est pas, il y aura quelque point dans cette ellipse qui ne sera point dans la surface du cylindre. Supposons qu'on ait pris un point quelconque  $\Theta$  dans l'ellipse qui ne soit pas dans la surface du cylindre. Du point  $\Theta$ , menons la droite  $\Theta\kappa$  perpendiculaire sur  $AB$ . Cette droite sera perpendiculaire sur le plan dans lequel se trouvent les droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ . Du point  $\kappa$  menons la droite  $\kappa\Lambda$  parallèle à  $\Gamma\Delta$ , et du point  $\Lambda$  et dans le plan du cercle décrit autour de  $ZH$  comme diamètre, élevons la droite  $\Lambda M$  perpendiculaire sur  $ZH$ . Supposons que le



cylindre. Il est donc évident que le point  $\epsilon$  est aussi dans la surface du cylindre. Mais on avoit supposé qu'il n'y étoit pas. Donc ce qu'il falloit démontrer est évident.

Il est encore évident que le cylindre qui comprend l'ellipse sera droit, si l'autre diamètre est égal à la distance des droites qui sont menées des extrémités du diamètre AB parallèlement à l'oblique élevée menée du centre.

Que l'autre diamètre soit plus grand que  $\pi h$ ; et supposons qu'il soit égal à  $\pi z$ . Par la

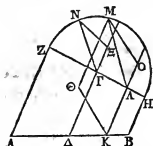


droite  $\pi z$ , conduisons un plan perpendiculaire sur celui où se trouvent les droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ; et dans ce plan et autour de  $\pi z$  comme diamètre décrivons un cercle et que ce cercle soit la base d'un cylindre qui ait pour axe la droite  $\Delta P$ .



Car si l'ellipse n'est pas dans la surface de ce cylindre, il y aura quelque point dans l'ellipse qui ne sera pas dans cette surface. Prenons un point quelconque  $\Theta$  dans cette ellipse; de ce point menons la droite  $\Theta K$  perpendiculaire sur  $AB$ ; du point  $K$  menons la droite  $KA$  parallèle à  $\Gamma\Delta$ , et du point  $A$  et dans le demi-cercle décrit autour de  $ZH$  comme diamètre, menons la droite  $AM$  perpendiculaire sur  $ZH$ . Supposons que le point  $M$  soit dans la demi-circonférence décrite autour de  $ZH$ ; et de ce point conduisons la perpendiculaire  $MO$  sur la droite  $KA$  prolongée. Cette droite sera perpendiculaire sur le plan où se trouvent les droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ; parce que  $KA$  est perpendiculaire sur  $ZH$ . Donc le quarré de  $MO$  est au quarré de  $MA$  comme le quarré de  $EN$  est au quarré de  $NR$  (*z*). Mais le quarré de  $MA$  est à la surface comprise sous  $AK$ ,  $KB$  comme le quarré de  $IN$  est au quarré de  $AD$ ; car le quarré de  $MA$  est égal à la surface comprise sous  $AZ$ ,  $AH$ ; et le quarré de  $IN$  est égal au quarré de  $IZ$ . Donc le quarré de  $MO$  est à la surface comprise sous  $AK$ ,  $KB$  comme le quarré de  $NE$  est au quarré de  $AD$ . Mais le quarré de

$K\Theta$  est à la surface comprise sous  $AK$ ,  $KB$  comme le quarré de  $\Xi N$  est au quarré de  $\Delta\Delta'$ , parce que  $\Xi N$  est égal à la moitié de l'autre diamètre ( $\gamma$ ). Il est donc évident que les



perpendiculaires  $MO$ ,  $OK$  sont égales et par conséquent les droites  $KO$ ,  $\Theta M$  ( $\zeta$ ). Mais la droite  $M\Theta$  est parallèle à l'axe du cylindre, et le point  $M$  est dans la surface de ce même cylindre; donc le point  $\Theta$  est aussi dans cette surface, mais on avoit supposé qu'il n'y étoit pas; il est donc évident que l'ellipse est nécessairement dans la surface du cylindre.

### PROPOSITION XI.

Il a été démontré par ceux qui ont vécu avant nous que deux cônes sont entre eux en raison composée des bases et des hau-



teurs. On démontrera de la même manière que deux segmens quelconques de cône sont entre eux en raison composée des bases et des hauteurs. On démontrera aussi qu'un segment quelconque de cylindre est triple du segment de cône qui a la même base et la même hauteur que le premier segment, de la même manière que l'on démontre qu'un cylindre est le triple d'un cône qui a la même base et la même hauteur ( $\alpha$ ).

## PROPOSITION XII.

Si un conoïde parabolique est coupé par un plan conduit par l'axe ou parallèlement à l'axe, la section sera une parabole, et cette parabole sera la même que celle qui comprend le conoïde. Son diamètre sera la commune section du plan coupant et de celui qui lui étant perpendiculaire passe par l'axe. Si ce conoïde est coupé par un plan perpendiculaire sur l'axe, la section sera un cercle ayant son centre dans l'axe.

Si un conoïde hyperbolique est coupé par un plan conduit par l'axe ou parallèlement à l'axe ou enfin par le sommet du cône qui

comprend le conoïde, la section sera une hyperbole. Si le plan coupant passe par l'axe, l'hyperbole sera la même que celle qui comprend le conoïde, et si le plan coupant est parallèle à l'axe, l'hyperbole sera semblable à celle qui comprend le conoïde; et enfin si le plan coupant passe par le sommet du cône qui comprend le conoïde, l'hyperbole ne sera pas semblable à l'hyperbole qui comprend le conoïde. Le diamètre de l'hyperbole sera la commune section du plan coupant et de celui qui lui étant perpendiculaire passe par l'axe. Si le plan coupant est perpendiculaire sur l'axe, la section sera un cercle ayant son centre dans l'axe du conoïde.

Si un sphéroïde alongé ou aplati est coupé par un plan conduit par l'axe ou parallèlement à l'axe, la section sera une ellipse. Si le plan coupant passe par l'axe, l'ellipse sera la même que celle qui comprend le sphéroïde; et si le plan coupant est parallèle à l'axe, elle sera semblable à celle qui comprend le sphéroïde. Le diamètre sera la commune section du plan coupant et de celui qui lui étant perpendiculaire passe par l'axe.

Si le plan coupant est perpendiculaire sur l'axe, la section sera un cercle ayant son centre dans l'axe.

Si chacune des figures dont nous venons de parler est coupée par un plan mené par l'axe, les perpendiculaires menées sur le plan coupant des points qui sont dans la surface de ces figures et non dans la section tombent en dedans de la section de la figure.

Les démonstrations de toutes ces propositions sont connues ( $\alpha$ ).

### PROPOSITION XIII.

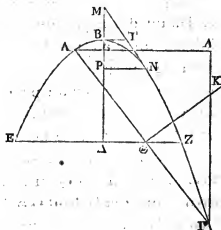
Si un conoïde parabolique est coupé par un plan qui ne soit pas conduit par l'axe, ni parallèle à l'axe, ni perpendiculaire sur l'axe, la section sera une ellipse dont le grand diamètre sera la section du plan coupant par celui qui lui étant perpendiculaire passe par l'axe du conoïde; et le petit diamètre sera égal à l'intervalle des droites menées parallèlement à l'axe par les extrémités du grand diamètre.

Coupons un conoïde parabolique par un plan, comme nous l'avons dit; coupons en-



sons la droite  $k\theta$  perpendiculaire sur  $\tau\alpha$ . La droite  $k\theta$  sera perpendiculaire sur le plan dans lequel se trouve la parabole  $\alpha\Gamma B$ ; parce que le plan coupant est aussi perpendiculaire sur ce même plan. Par le point  $\theta$  menons la droite  $ez$  faisant des angles droits avec  $B\Delta$ , et conduisons un plan par les droites  $ez$ ,  $k\theta$ . Ce plan sera perpendiculaire sur  $B\Delta$ ; et le conoïde sera coupé par un plan perpendiculaire sur l'axe. La section sera donc un cercle ayant pour centre le point  $\Delta$ . Donc le quarré de  $k\theta$  sera égal à la surface comprise sous  $z\theta$ ,  $\theta e$ ; car un demi-cercle ayant été construit sur  $ez$  et la droite  $k\theta$  étant perpendiculaire, la droite  $k\theta$  sera une moyenne proportionnelle ( $\ast$ ), et son quarré sera par conséquent égal à la surface comprise sous  $e\theta$ ,  $\theta z$ . Menons la droite  $mn$  tangente à la parabole et parallèle à  $\alpha\Gamma$ ; et que cette droite soit tangente au point  $N$ . Conduisons aussi la droite  $br$  tangente à la parabole et parallèle à  $ez$ . La surface comprise sous  $\alpha\theta$ ,  $\theta r$  sera à la surface comprise sous  $e\theta$ ,  $\theta z$  comme le quarré de  $NT$  est au quarré de  $BT$ ; ce qui est démontré ( $\zeta$ ). Mais  $TM$  est égal à  $NT$ ; parce que  $BP$  est égal à  $BM$ ; donc la

surface comprise sous  $A\Theta$ ,  $\Theta\Gamma$  est au carré de  $K\Theta$  comme le carré de  $TM$  est au carré de  $TB$ . Donc, par conversion, le carré de la perpendiculaire  $\Theta K$  est à la surface com-



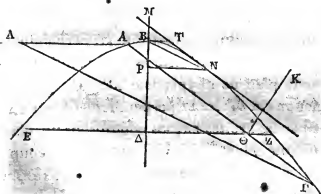
prise sous  $A\Theta$ ,  $\Theta\Gamma$  comme le carré de  $BT$  est au carré de  $TM$ . Mais les triangles  $TAA$ ,  $TMB$  sont semblables ( $\gamma$ ); donc le carré de la perpendiculaire  $\Theta K$  est au rectangle compris sous  $A\Theta$ ,  $\Theta\Gamma$  comme le carré de  $AA$  est au carré de  $AT$ . Nous démontrerons semblablement que les carrés des autres perpendiculaires menées de la section sur  $AT$  sont aux surfaces comprises sous les segmens de  $AT$  comme le carré de  $AA$  au carré de  $AT$ . Il est donc évident que la section  $AT$  est

une ellipse (t) ; que le grand diamètre est la droite  $AR$  et que le petit diamètre est égal à  $AA$ .

# PROPOSITION XIV.

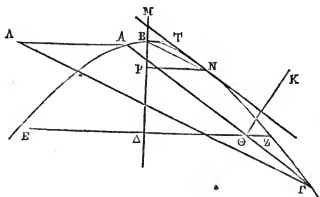
Si un conoïde hyperbolique est coupé par un plan qui rencontre tous les côtés du cône comprenant le conoïde, et qui ne soit pas perpendiculaire sur l'axe, la section sera une ellipse; son grand diamètre sera la section du plan coupant par celui qui lui étant perpendiculaire passe par l'axe.

Coupons un conoïde parabolique par un



plan, ainsi qu'il a été dit; que ce même conoïde soit coupé par l'axe par un plan perpendiculaire sur le plan coupant; que la section

du conoïde soit l'hyperbole  $AB\Gamma$  ; que  $AT$  soit la section du plan qui coupe le conoïde ; que  $B\Delta$  soit l'axe du conoïde , et le diamètre de la section. Supposons que dans la section l'on ait pris un point quelconque  $\kappa$ . Du



point  $\kappa$  conduisons la droite  $\kappa\Theta$  perpendiculaire sur  $AT$ . Cette droite sera perpendiculaire sur le plan de l'hyperbole  $AB\Gamma$ . Du point  $\Theta$  menons la droite  $EZ$  perpendiculaire sur  $B\Delta$ , et par les droites  $EZ$ ,  $\kappa\Theta$  conduisons un plan qui coupe le conoïde ; le conoïde sera coupé par un plan perpendiculaire sur l'axe. La section sera donc un cercle qui aura pour centre le point  $\Delta$ . Le carré de la perpendiculaire  $\kappa\Theta$  sera donc égal à la surface comprise sous  $E\Theta$ ,  $\Theta Z$ . Menons une droite  $MN$

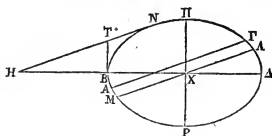


qui étant parallèle à  $AT$  touche l'hyperbole au point  $N$ , et menons aussi la droite  $BT$  tangente à l'hyperbole et parallèle à  $EZ$ . La surface comprise sous  $E\Theta$ ,  $HZ$  sera à la surface comprise sous  $A\Theta$ ,  $\Theta T$  comme le carré de  $BT$  est au carré de  $TN$  ( $\alpha$ ). Donc le carré de  $\Theta K$  est à la surface comprise sous  $A\Theta$ ,  $\Theta T$  comme le carré de  $BT$  est au carré de  $TN$ . On démontrera semblablement que les autres carrés des perpendiculaires menées de la section sur  $AT$  sont aux surfaces comprises sous les segmens de  $AT$  formés par ces perpendiculaires comme le carré de  $BT$  est au carré de  $TN$ . Mais la droite  $BT$  est plus petite que la droite  $TN$ , à cause que la droite  $MT$  est plus petite que la droite  $TN$ , la droite  $MB$  étant plus petite que la droite  $BP$ , ce qui est une propriété de l'hyperbole (6). Il est donc évident que cette section est une ellipse. Semblablement si la droite  $TA$  est parallèle à  $BN$ , et la droite  $AA$  perpendiculaire sur  $BA$ , le grand diamètre sera la droite  $AT$ , et le petit diamètre la droite  $AA$  ( $\gamma$ ).

## PROPOSITION XV.

Si un sphéroïde alongé est coupé par un plan qui ne soit pas perpendiculaire sur l'axe, la section sera une ellipse. Le grand diamètre sera la section du plan coupant par un plan qui lui étant perpendiculaire passe par l'axe.

Si le plan coupant passe par l'axe, ou s'il est parallèle à l'axe, la chose est évidente. Que le conoïde soit coupé différemment. Coupons le même conoïde par un



autre plan conduit par l'axe et perpendiculaire sur le plan coupant; que cette section soit l'ellipse ABΓΔ; que ΓA soit la section du plan coupant; que BΔ soit l'axe du sphéroïde et le diamètre de l'ellipse; que le point x soit le centre, et que NP soit le petit dia-

mètre. Menons la droite  $BT$  perpendiculaire sur  $BA$ , et la droite  $HN$  parallèle à  $AR$  et tangente à l'ellipse au point  $N$ ; et par le point  $X$  menons la droite  $MA$  parallèle à  $AR$ . Nous démontrerons, comme nous l'avons fait plus haut, que les quarrés des perpendiculaires menées de la section sur  $AR$  sont aux surfaces comprises sous les segmens de  $AR$  comme le quarré de  $BT$  est au quarré de  $TN$ . Il est donc évident que la section est une ellipse et que  $AR$  est un de ses diamètres. Mais il faut démontrer que  $AR$  est son grand diamètre. En effet, la surface comprise sous  $\pi X$ ,  $XP$  est à la surface comprise sous  $MX$ ,  $XA$  comme le quarré de  $BT$  est au quarré de  $NT$ , parce que les droites  $\pi P$ ,  $MN$  sont parallèles aux tangentes ( $\alpha$ ). Mais la surface comprise sous  $\pi X$ ,  $XP$  est plus petite que la surface comprise sous  $MX$ ,  $XA$ , parce que  $X\pi$  est plus petit que  $XA$ . Donc le quarré de  $BT$  est plus petit que le quarré de  $TN$  ( $\epsilon$ ). Donc les quarrés des perpendiculaires menées de la section sur  $AR$  sont moindres que les surfaces comprises sous les segmens de  $AR$ . Il est donc évident que  $TA$  est le plus grand diamètre.

Si un sphéroïde aplati est coupé par un

plan, la démonstration sera la même; et le petit diamètre sera celui qui est compris dans le sphéroïde ( $\gamma$ ).

Il suit de ce que nous venons de dire, que si toutes ces figures sont coupées par des plans parallèles, leurs sections seront semblables; car la raison des quarrés des perpendiculaires aux surfaces comprises sous les segmens est toujours la même ( $\delta$ ).

### PROPOSITION XVI.

Dans un conoïde parabolique, parmi les droites qui sont menées par un point quelconque de sa surface parallèlement à l'axe, celles qui sont menées vers le côté où le conoïde est convexe tombent hors du conoïde, et celles qui sont menées vers le côté opposé tombent en dedans.

Car ayant conduit un plan par l'axe et par le point par lequel l'on a mené une parallèle à l'axe, la section sera une parabole dont le diamètre sera l'axe du conoïde. Mais dans la parabole, parmi les droites qui sont conduites parallèlement au diamètre, celles qui sont menées vers le côté où la parabole est

convexe sont hors de la parabole, et celles qui sont menées vers le côté opposé sont dans la parabole. Donc la proposition est évidente.

Dans un conoïde hyperbolique, parmi les droites qui sont menées par un point quelconque de sa surface parallèlement à une droite menée du sommet du cône qui comprend le conoïde dans le conoïde même, celles qui sont menées vers le côté où le conoïde est convexe tombent hors du conoïde, et celles qui sont menées vers le côté opposé tombent en dedans.

Car ayant conduit un plan par la droite qui est menée dans le conoïde par le sommet du cône qui comprend le conoïde, et par le point par lequel on a mené une parallèle à cette droite, la section sera une hyperbole, et son diamètre sera la droite menée du sommet du cône dans le conoïde (12). Mais dans une hyperbole, parmi les droites qui sont menées par un de ses points parallèlement à une droite, comme nous l'avons dit, celles qui sont menées vers le côté où l'hyperbole est convexe, tombent hors de l'hyperbole, et celles qui sont menées vers le côté opposé tombent en dedans.

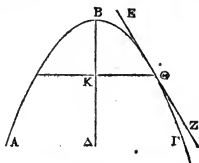
Si un plan touche des conoïdes sans les couper, il ne les touchera qu'en un seul point; et le plan conduit par le point de contact et par l'axe sera perpendiculaire sur le plan tangent.

Car qu'un plan touche un conoïde en plusieurs points, si cela est possible. Prenons deux points où ce plan touche le conoïde. Menons par ces points des parallèles à l'axe. Si par ces droites on fait passer un plan, ce plan passera par l'axe ou sera parallèle à l'axe. La section du conoïde sera donc une section conique (12), et ces deux points seront dans cette section. Donc, puisque ces points sont dans une surface, ils sont aussi dans un plan. Donc la droite qui joint ces points sera en dedans de la section conique, et par conséquent en dedans de la surface du conoïde. Mais cette même droite est dans le plan tangent, puisque ces points sont dans ce plan; donc une certaine partie du plan tangent est en dedans du conoïde. Ce qui est impossible, car on avoit supposé qu'il ne le coupoit point. Donc ce plan ne touchera le conoïde qu'en un seul point.

Il est évident que le plan conduit par le

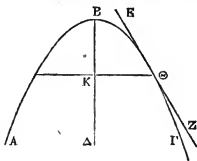
point de contact et par l'axe est perpendiculaire sur le plan tangent, si ce plan est tangent au sommet du conoïde; car ayant conduit par l'axe deux plans, les sections du conoïde seront des sections coniques ayant pour diamètre l'axe même. Mais les droites qui sont les sections du plan tangent et qui sont tangentes à l'extrémité du diamètre forment des angles droits avec le même diamètre. Il y aura donc deux droites dans le plan tangent qui seront perpendiculaires sur l'axe. Donc le plan tangent sera perpendiculaire sur l'axe et par conséquent sur le plan conduit par l'axe.

Que le plan ne soit pas tangent au sommet du conoïde. Conduisons un plan par le



point de contact et par l'axe; que la section du conoïde soit la section conique  $AB\Gamma$ ; que

$B\Delta$  soit l'axe du conoïde et le diamètre de cette section, et que la section du plan tangent soit la droite  $E\Theta Z$  qui touche la section



conique au point  $\Theta$ . Par le point  $\Theta$  conduisons la droite  $\Theta K$  perpendiculaire sur le diamètre  $B\Delta$ , et par cette droite menons un plan perpendiculaire sur l'axe. Ce plan engendrera un cercle dont le centre sera le point  $K$ . La section de ce plan par le premier sera une droite tangente au cercle et faisant des angles droits avec la droite  $\Theta K$ . Cette droite sera donc perpendiculaire sur le plan où se trouvent les droites  $K\Theta$ ,  $B\Delta$ . Il est donc évident que le plan tangent est perpendiculaire sur ce plan, puisque les droites qui sont dans ce plan lui sont perpendiculaires.



## PROPOSITION XVII.

Si un plan touche un sphéroïde alongé ou aplati sans le couper, il ne le touchera qu'en un seul point, et le plan qui passe par le point de contact et par l'axe sera perpendiculaire sur le plan tangent.

Que ce plan touche un sphéroïde en plusieurs points. Prenons deux points où ce plan touche le sphéroïde; par chacun de ces points, menons des droites parallèles à l'axe; si par ces droites nous menons un plan, la section du sphéroïde sera une ellipse et ces points seront dans cette section. Donc la droite placée entre ces deux points sera en dedans de la section conique, et par conséquent en dedans de la surface du sphéroïde. Mais cette même droite est aussi dans le plan tangent, parce que les deux points s'y trouvent placés. Donc une certaine partie du plan tangent sera en dedans du sphéroïde. Mais cela n'est point, car on avoit supposé qu'il ne le coupoit point. Il est donc évident que ce plan ne touche le sphéroïde qu'en un seul point.

Nous démontrerons de la même manière que nous l'avons fait dans les conoïdes, que le plan conduit par le point de contact et par l'axe sera perpendiculaire sur le plan tangent.

Si un conoïde ou un sphéroïde alongé ou aplati est coupé par un plan conduit par l'axe; si l'on mène une droite tangente à la section qui est engendrée, et si par la tangente on conduit un plan perpendiculaire sur le plan coupant, ce plan touchera la figure au même point où cette droite touche la section conique.

Car ce plan ne touchera pas en un autre point la surface de cette figure; s'il en étoit autrement, la perpendiculaire menée de ce point sur le plan coupant tomberoit hors de la section conique, puisqu'elle tomberoit sur la tangente, à cause que ces plans sont perpendiculaires entre eux; ce qui ne peut être, car il est démontré qu'elle tombe en dedans (12).

## PROPOSITION XVIII.

Si deux plans parallèles touchent un sphéroïde alongé ou aplati, la droite qui joindra les points de contact passera par le centre du sphéroïde.

Si les plans font des angles droits avec l'axe, la chose est évidente. Supposons que les angles ne soient pas droits. Le plan conduit par l'axe et par un des points de contact sera perpendiculaire sur le plan qu'il coupe et par conséquent sur le plan parallèle à celui-ci. Il faut donc qu'un même plan passe par l'axe et par les deux points de contact, sans quoi il y auroit deux plans perpendiculaires sur un même plan qui seroient conduits par une même droite non perpendiculaire sur ce plan; car on a supposé que l'axe n'étoit pas perpendiculaire sur les plans parallèles. Donc les points de contact et l'axe seront dans le même plan; et le sphéroïde sera coupé par un plan conduit par l'axe. Donc la section sera une ellipse et les sections des plans tangens qui touchent l'ellipse aux points de contact des plans

seront parallèles. Or si des droites parallèles sont tangentes à une ellipse ; le centre de l'ellipse et les points de contact sont dans une même droite.

### PROPOSITION XIX.

Si deux plans parallèles touchent un sphéroïde alongé ou aplati , et si par le centre du sphéroïde on conduit un plan parallèle aux plans tangens , les droites menées de la section qui est engendrée parallèlement à la droite qui joint les points de contact tombent hors du sphéroïde.

Que ce que nous avons dit soit fait ; prenons un point quelconque dans la section qui est engendrée , et par ce point et par la droite qui joint les points de contact conduisons un plan , ce plan coupera le sphéroïde et les plans parallèles. Que la section du sphéroïde soit l'ellipse  $AB\Gamma\Delta$  ; que les sections des plans tangens soient les droites  $EZ$  ,  $H\Theta$  ; que le point pris à volonté soit  $A$  , et que la droite qui joint les points de contact soit  $BD$  . Cette droite passera par le centre (18). Que la section du plan parallèle aux plans tangens

soit  $\Gamma A$ . Cette droite passera aussi par le centre, parce que le plan où elle est passe par le centre. Donc, puisque la section  $AB\Gamma\Delta$  est ou



un cercle ou une ellipse; que les deux droites  $EZ$ ,  $H\Theta$  sont tangentes à cette section et que par le centre on leur a conduit une parallèle  $A\Gamma$ , il est évident que les droites menées des points  $A$ ,  $\Gamma$  parallèlement à  $B\Delta$  sont tangentes à la section et tombent en dehors du sphéroïde ( $\alpha$ ).

Si le plan parallèle aux tangentes n'est pas conduit par le centre, comme  $K\Lambda$ , il est évident que parmi les droites menées de la section, celles qui sont menées vers le côté où est le petit segment tombent hors du sphéroïde, et que celles qui sont menées vers le côté opposé tombent en dedans ( $\epsilon$ ).

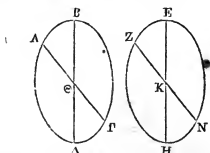
## PROPOSITION XX.

Si un sphéroïde quelconque est coupé par un plan conduit par le centre, ce sphéroïde ainsi que sa surface, est coupé en deux parties égales par ce plan.

Coupons un sphéroïde par un plan conduit par son centre; ou ce plan coupera le sphéroïde par l'axe, ou bien il le coupera à angles droits ou obliques. Si ce plan coupe le sphéroïde par l'axe ou s'il est perpendiculaire sur l'axe, non-seulement le sphéroïde, mais encore sa surface sera coupée en deux parties égales; car il est évident qu'une partie du sphéroïde convient avec l'autre partie, et qu'une partie de sa surface convient aussi avec l'autre partie.

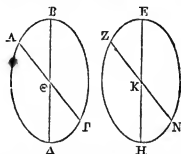
Mais supposons que le plan coupant ne passe pas par l'axe, et qu'il ne soit pas perpendiculaire sur l'axe. Coupons le sphéroïde par un plan qui passe par l'axe et qui soit perpendiculaire sur le plan coupant; que la section du sphéroïde soit l'ellipse  $AB\Gamma\Delta$ ; que la droite  $B\Delta$  soit le diamètre de l'ellipse et l'axe du sphéroïde; que le point  $\Theta$  soit le

centre, et que la section du plan que coupe le sphéroïde par le centre soit la droite  $AR$ . Prenons un autre sphéroïde égal et semblable au premier ; coupons-le par un plan



conduit par l'axe ; que sa section soit l'ellipse  $EZH\Lambda$  ; que  $EH$  soit le diamètre de l'ellipse et l'axe du sphéroïde, et le point  $\kappa$  le centre. Par le centre  $\kappa$ , menons la droite  $ZN$ , faisant l'angle  $\kappa$  égal à l'angle  $\theta$  ; et par la droite  $ZN$  conduisons un plan perpendiculaire sur le plan où se trouve la section  $EZH\Lambda$ . On aura deux ellipses  $AB\Gamma\Delta$ ,  $EZH\Lambda$  égales et semblables. C'est pourquoi ayant posé  $EH$  sur  $BA$  et  $ZN$  sur  $AR$ , ces deux ellipses conviendront parfaitement. Mais le plan conduit par  $NZ$  et le plan conduit par  $AR$  conviendront encore parfaitement, puisqu'ils sont conduits l'un et l'autre par une

même droite dans un même plan ; donc le segment qui est retranché du sphéroïde , du côté où se trouve le point  $E$  , par le plan conduit par  $NZ$  , et l'autre segment qui est



retranché de l'autre sphéroïde , du côté où se trouve le point  $B$  , par le plan conduit par la droite  $AF$  , conviennent parfaitement. Donc les segmens restans , et les surfaces de ces segmens conviennent encore parfaitement.

Si l'on pose la droite  $EH$  sur  $BΔ$  , de manière que le point  $E$  soit posé sur le point  $Δ$  , le point  $H$  sur le point  $B$  , et enfin si l'on pose la droite qui est entre les points  $N$  ,  $Z$  sur la droite qui est entre les points  $A$  ,  $Γ$  , il est évident que les ellipses conviendront parfaitement , que le point  $Z$  tombera sur le point  $Γ$  et le point  $N$  sur le point  $A$  . Sembla-



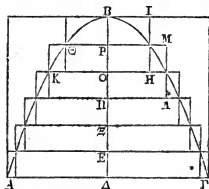
blement, le plan conduit par  $NZ$ , et le plan conduit par  $AR$  conviennent parfaitement, et le segment qui est retranché, du côté où se trouve le point  $H$ , par le plan conduit par  $NZ$ , et le segment qui est retranché, du côté où se trouve le point  $B$ , par le plan conduit par  $AR$ , conviennent encore parfaitement. Mais celui qui est du côté où se trouve le point  $E$ , et celui qui est du côté où se trouve le point  $A$  conviennent encore parfaitement; donc, puisque le même segment convient parfaitement avec l'un et avec l'autre segment, il est évident que ces segments sont égaux, et que leurs surfacesont aussi égales.

## PROPOSITION XXI.

Etant donné un segment d'un conoïde parabolique ou hyperbolique retranché par un plan perpendiculaire sur l'axe, ou bien un segment d'un sphéroïde alongé ou aplati retranché semblablement, de manière cependant que celui-ci ne soit pas plus grand que la moitié du sphéroïde, on peut inscrire dans chaque segment une figure solide com-

posée de cylindres ayant tous la même hauteur, et lui en inscrire une autre de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre que toute quantité solide proposée.

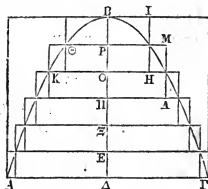
Soit donné un segment tel que  $AB\Gamma$ . Coupons ce segment par un plan conduit par



l'axe; que la section de ce segment soit la section conique  $AB\Gamma$ , et que celle du plan qui coupe le segment soit la droite  $AT$ . Que la droite  $BA\Delta$  soit l'axe du segment, et le diamètre de la section conique. Puisque l'on a supposé que le plan coupant est perpendiculaire sur l'axe, la section sera un cercle ayant pour diamètre la droite  $TA$ . Que ce cercle soit la base d'un cylindre qui ait pour axe la droite  $BA\Delta$ . La surface de ce cylindre

tombera hors du segment, parce que c'est un segment de conoïde, ou bien un segment de sphéroïde qui n'est pas plus grand que la moitié du sphéroïde (16 et 19). C'est pourquoi, si le cylindre est coupé continuellement en deux parties par un plan perpendiculaire sur l'axe, ce qui restera sera à la fin moindre que la quantité solide proposée. Que le reste qui est moindre que la quantité solide proposée soit le cylindre qui a pour base le cercle décrit autour de  $AR$  comme diamètre, et pour axe la droite  $E\Delta$ . Partageons, aux points  $P, O, \Pi, \Xi$ , la droite  $B\Delta$  en parties égales chacune à  $E\Delta$ ; par les points de division conduisons à  $AR$  des parallèles terminées à la section conique, et par ces parallèles faisons passer des plans perpendiculaires sur  $B\Delta$ . Les sections seront des cercles qui auront leurs centres dans  $B\Delta$ . Sur chacun de ces cercles construisons deux cylindres dont chacun ait un axe égal à  $E\Delta$ ; que l'un d'eux soit du côté du cylindre où est le point  $\Delta$ ; et l'autre du côté du cylindre où est le point  $B$ . Il est évident que l'on aura inscrit dans le segment une certaine figure solide composée des cylindres

qui sont construits du côté où est le point  $\Delta$ , et qu'on lui en aura aussi circonscrit une autre composée des cylindres qui sont construits du côté où est le point B. Il reste à



démontrer que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est moindre que la quantité solide proposée. Or, chacun des cylindres qui sont dans la figure inscrite est égal au cylindre qui est construit sur le même cercle du côté où est le point B; c'est-à-dire que le cylindre  $\Theta H$  sera égal au cylindre  $\Theta I$ ; le cylindre  $\kappa A$  au cylindre  $\kappa M$ , et ainsi de suite. Donc la somme des uns de ces cylindres est égale à celle des autres. Il est donc évident que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est le cylindre qui a pour base le cercle décrit autour de

AR comme diamètre et pour axe la droite EA. Or, ce cylindre est moindre que la quantité solide proposée.

## PROPOSITION XXII.

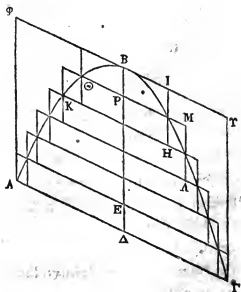
Etant donné un segment d'un conoïde parabolique ou hyperbolique retranché par un plan non perpendiculaire sur l'axe, ou un segment de sphéroïde allongé ou aplati retranché semblablement de manière cependant que celui-ci ne soit pas plus grand que la moitié du sphéroïde, on peut inscrire dans chaque segment une figure solide composée de segmens de cylindre ayant tous une hauteur égale, et lui en circonscrire une autre de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre qu'une quantité solide donnée.

Soit donné un segment tel que nous l'avons dit. Coupons ce segment par un autre plan conduit par l'axe et perpendiculaire sur le plan qui retranche le segment donné. Que la section du segment soit la section conique ABTH, et la section du plan qui retranche le segment, la droite TA. Puisqu'on



le conoïde conduisons une droite au point  $B$ ; prolongeons cette droite, et que son prolongement soit  $B\Delta$ ; si enfin le segment appartient à un sphéroïde, de son centre conduisons une droite au point  $B$ , et que la partie de cette droite comprise dans le segment soit  $B\Delta$ . Il est d'abord évident que la droite  $B\Delta$  partagera en deux parties égales la droite  $AR$ . Donc le point  $B$  sera le sommet du segment, et la droite  $B\Delta$  son axe. On a donc une ellipse décrite autour de  $AR$  comme diamètre, et une oblique  $B\Delta$  menée de son centre dans un plan qui passe par un de ses diamètres et qui est perpendiculaire sur le plan de l'ellipse. On peut donc trouver un cylindre qui ait son axe sur la droite  $B\Delta$ , et dans la surface duquel se trouve l'ellipse qui est décrite autour de  $AR$  comme diamètre (10). La surface de ce cylindre tombera hors du segment; car c'est un segment de conoïde, ou bien un segment de sphéroïde qui n'est pas plus grand que la moitié du sphéroïde (16 et 19). L'on aura donc un certain segment de cylindre ayant pour base une ellipse décrite autour de  $AR$  comme diamètre, et pour axe la droite  $B\Delta$ . C'est pour-

quoi si l'on coupe continuellement ce segment en deux parties égales par des plans parallèles au plan conduit par  $AR$ , ce qui restera sera moindre que la quantité solide pro-



posée. Que le segment qui a pour base l'ellipse décrite autour de  $AR$  comme diamètre, et pour axe la droite  $EA$  soit moindre que la quantité solide proposée. Partageons  $AB$  en parties égales chacune à  $AE$ ; par les points de division menons à  $AR$  des droites parallèles et terminées à l'ellipse; et par ces droites faisons passer des plans parallèles



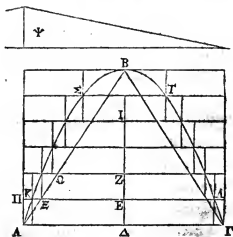
au plan conduit par  $AR$ . Ces plans couperont la surface du segment, et les sections seront des ellipses semblables à celle qui est décrite autour de  $AR$  comme diamètre, parce que ces plans sont parallèles entre eux (15. *Cor.*) Construisons sur chaque ellipse deux segmens de cylindre; que l'un soit du côté de l'ellipse où est le point  $\Delta$  et l'autre du côté où est le point  $B$ . Que ces segmens de cylindre aient pour axe une droite égale à  $\Delta E$ . On aura donc certaines figures solides composées de segmens de cylindre ayant la même hauteur, dont l'une sera inscrite et l'autre circonscrite. Il reste à démontrer que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est moindre que la quantité solide proposée. On démontrera comme dans la proposition précédente que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est un segment qui a pour base l'ellipse décrite autour de  $AR$  comme diamètre et pour axe la droite  $E\Delta$ . Or, ce segment est moindre que la grandeur solide proposée.

Ces choses étant établies, nous allons démontrer celles qui ont été proposées relativement à ces figures.

## PROPOSITION XXIII.

Un segment quelconque d'un conoïde parabolique retranché par un plan perpendiculaire sur l'axe est égal à trois fois la moitié du cône qui a la même base et le même axe que ce segment.

Soit un segment d'un conoïde parabolique retranché par un plan perpendiculaire sur l'axe. Coupons ce segment par un autre plan



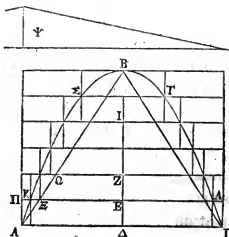
conduit par l'axe; que la section de sa surface soit la parabole  $AB\Gamma$ ; que la section du plan qui retranche le segment soit la droite  $\Gamma A$ , et que l'axe du segment soit la droite  $B\Delta$ .

Soit aussi un cône qui ait la même base et le même axe que le segment, ayant pour sommet le point B. Il faut démontrer que le segment du conoïde est égal à trois fois la moitié de ce cône.

Supposons que le cône  $\Psi$  soit égal à trois fois la moitié du cône dont la base est le cercle décrit autour de  $AR$  comme diamètre et dont l'axe est  $BA$ . Soit aussi un cylindre qui ait pour base le cercle décrit autour de  $AR$  comme diamètre, et pour axe la droite  $BA$ . Le cône  $\Psi$  sera égal à la moitié du cylindre total; parce que le cône  $\Psi$  est égal à trois fois la moitié de l'autre cône. Je dis que le segment du conoïde est égal au cône  $\Psi$ .

Car si le segment du conoïde n'est pas égal au cône  $\Psi$ , il est plus grand où plus petit. Qu'il soit d'abord plus grand, si cela est possible. Inscrivons dans le segment une figure solide composée de cylindres qui aient la même hauteur; circonscrivons-lui en une autre de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre que l'excès du segment sur le cône  $\Psi$ . Que parmi les cylindres dont la figure circonscrite est composée, le plus grand soit celui

qui a pour base le cercle décrit autour de  $AR$  comme diamètre, et pour axe la droite  $E\Delta$ ; et que le plus petit soit celui qui a pour base le cercle décrit autour de  $\Sigma T$  comme dia-

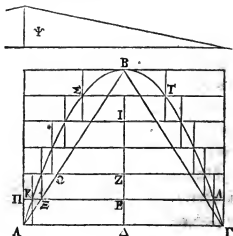


mètre et pour axe la droite  $B\Theta$ . Que parmi les cylindres dont la figure inscrite est composée, le plus grand soit celui qui a pour base le cercle décrit autour de  $K\Lambda$  comme diamètre et pour axe la droite  $\Delta E$ ; et que le plus petit soit celui qui a pour base le cercle décrit autour de  $\Sigma T$  comme diamètre et pour axe la droite  $\Theta I$ . Que les plans de tous ces cylindres soient prolongés jusqu'à la surface du cylindre qui a pour base le cercle décrit autour de  $AR$  comme diamètre et pour axe

la droite  $BA$ . Le cylindre total sera partagé en autant de cylindres qu'il y en a dans la figure circonscrite, et chacun de ces cylindres sera égal au plus grand des cylindres circonscrits. Mais l'excès de la figure circonscrite au segment sur la figure inscrite est moindre que l'excès du segment sur le cône  $\psi$ ; il est donc évident que la figure inscrite dans le segment est plus grande que le cône  $\psi$  ( $\alpha$ ).

Le premier des cylindres placés dans le cylindre total, qui a pour axe la droite  $AE$  est au premier des cylindres placés dans la figure inscrite, qui a pour axe la droite  $AE$  comme le carré de la droite  $AA$  est au carré de la droite  $KE$ ; et le carré de la droite  $AA$  est au carré de la droite  $KE$  comme  $BA$  est à  $BE$ , et comme  $AA$  est à  $EE$  (6). On démontrera semblablement que le second des cylindres placés dans le cylindre total, qui a pour axe la droite  $EZ$  est au second des cylindres placés dans la figure inscrite comme  $PE$ , c'est-à-dire  $AA$ , est à  $ZO$ . De plus, chacun des autres cylindres placés dans le cylindre total sera à chacun des cylindres qui sont placés dans la figure inscrite,

et qui ont le même axe comme le rayon de la base est à la partie de ce rayon placée entre les droites  $AB$ ,  $B\Delta$ . Donc la somme de tous les cylindres placés dans le cylindre qui a



pour base le cercle décrit autour de  $AR$  comme diamètre et pour axe la droite  $B\Delta$ , est à la somme de tous les cylindres placés dans la figure inscrite comme la somme des rayons des cercles qui sont dans les bases des cylindres dont nous venons de parler est à la somme des droites qui sont placées entre les droites  $AB$ ,  $B\Delta$  (2) ( $\gamma$ ). Mais si des secondes droites dont nous venons de parler, on retranche les droites  $A\Delta$ , la somme des pre-

mières droites dont nous venons de parler est plus grande que le double de la somme des secondes droites restantes (1) (d'). Donc la somme des cylindres placés dans le cylindre total qui a pour axe la droite  $\Delta B$  est plus grande que le double de la figure inscrite. Donc le cylindre total qui a pour axe  $B\Delta$  est plus grand que le double de la figure inscrite. Mais ce cylindre est double du cône  $\Psi$ ; donc la figure inscrite est plus petite que le cône  $\Psi$ . Ce qui ne peut être; car on a démontré qu'elle est plus grande. Donc le segment du conoïde n'est pas plus grand que le cône  $\Psi$ .

- Je dis à présent que ce segment n'est pas plus petit. Inscrivons dans le segment une figure, et circonscrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de l'une sur l'autre soit moindre que l'excès du cône  $\Psi$  sur le segment. Faisons le reste comme auparavant. Puisque la figure inscrite est plus petite que le segment, et que la figure inscrite diffère moins de la figure circonscrite que le segment ne diffère du cône, il est évident que la figure circonscrite est plus petite que le cône  $\Psi$ .





droite égale à  $\Delta E$  est à chacun des cylindres qui sont placés dans la figure circonscrite, et qui ont le même axe comme le rayon de la base est à la partie de ce rayon placée entre les droites  $AB$ ,  $BA$ . Donc la somme des cylindres placés dans le cylindre total qui a pour axe la droite  $BA$  est à la somme des cylindres placés dans la figure circonscrite comme la somme des premières droites est à la somme des secondes (2). Mais la somme des premières droites, c'est-à-dire la somme des rayons des cercles qui sont les bases des cylindres est moindre que le double de la somme des droites qui sont retranchées de ces rayons, réunie à la droite  $AA$  (1); il est donc évident que la somme des cylindres placés dans le cylindre total est moindre que le double de la somme des cylindres placés dans la figure circonscrite. Donc le cylindre qui a pour base le cercle décrit autour de  $AB$  comme diamètre et pour axe la droite  $BA$  est plus petit que le double de la figure circonscrite. Mais ce cylindre n'est pas plus petit que le double de la figure circonscrite, puisqu'il est au contraire plus grand que le double de cette figure; car ce cylindre est

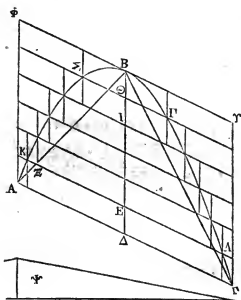
double du cône  $\Psi$ , et l'on a démontré que la figure circonscrite est plus petite que le cône  $\Psi$ . Donc le segment du conoïde n'est pas plus petit que le cône  $\Psi$ . Mais on a démontré qu'il n'est pas plus grand ; donc le segment du conoïde est égal à trois fois la moitié du cône qui a la même base et le même axe que ce segment.

### PROPOSITION XXIV.

Si un segment d'un conoïde parabolique est retranché par un plan non perpendiculaire sur l'axe, ce segment sera parallèlement égal à trois fois la moitié du segment de cône qui a la même base et le même axe que ce segment.

Qu'un segment d'un conoïde parabolique soit retranché comme nous l'avons dit. Coupons ce même segment par un autre plan conduit par l'axe et perpendiculaire sur celui qui coupe la figure ; que la section de la figure soit la parabole  $AB\Gamma$ , et que la section du plan coupant soit la droite  $AR$ . Menons à la droite  $AR$  une parallèle  $or$  qui soit tangente à la parabole au point  $B$  ; et menons la droite  $B\Delta$  parallèle à l'axe. Cette droite coupera en deux

parties égales la droite  $AR$  (2). Faisons passer par la droite  $\phi r$  un plan parallèle à celui qui est conduit par  $A\Delta$ . Ce plan sera tangent au

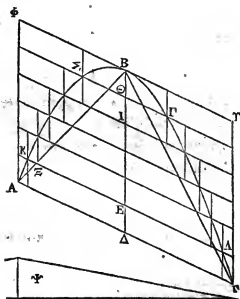


conoïde au point  $B$  ; le point  $B$  sera le sommet du segment et la droite  $B\Delta$  son axe. Puisque le plan conduit par  $AR$  n'est point perpendiculaire sur l'axe et que ce plan coupe le conoïde, la section sera une ellipse ayant pour grand diamètre la droite  $AR$  (13). Puisque l'on a une ellipse décrite autour de  $AR$  comme diamètre et une oblique menée

de son centre dans un plan qui est conduit par le diamètre de l'ellipse et qui est perpendiculaire sur son plan, on peut trouver un cylindre qui ait son axe sur la droite  $BA$  et dans la surface duquel se trouve l'ellipse (10). On peut de même trouver un cône qui ait pour sommet le point  $B$  et dans la surface duquel se trouve l'ellipse (9). On aura donc un certain segment de cylindre ayant pour base l'ellipse décrite autour de  $AB$  comme diamètre et pour axe la droite  $BA$ ; on aura de plus un segment de cône ayant la même base et le même axe que le segment de cylindre et le segment du conoïde. Il faut démontrer que le segment du conoïde est égal à trois fois la moitié du segment de cône.

Que le cône  $\psi$  soit égal à trois fois la moitié du segment de cône. Le segment de cylindre qui a la même base et le même axe que le segment du conoïde sera double du cône  $\psi$ ; parce que ce cône est égal à trois fois la moitié du segment de cône qui a la même base et le même axe que le segment du conoïde; et que le segment de cône dont nous venons de parler est le tiers du seg-

ment de cylindre qui a la même base et le même axe que le segment du conoïde (11). Il est donc nécessaire que le segment du conoïde soit égal au cône  $\Psi$ .



Car si ce segment ne lui est pas égal, il sera plus grand ou plus petit. Supposons d'abord qu'il soit plus grand, si cela est possible. Inscrivons dans le segment une figure solide composée de segmens de cylindre qui aient la même hauteur, et circonscrivons-lui ensuite une autre figure solide, de manière

que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit plus petit que l'excès du segment du conoïde sur le cône  $\Psi$ . Prolongeons les plans des segmens de cylindre jusqu'à la surface du segment de cylindre qui a la même base et le même axe que le segment du conoïde. Le premier des segmens placés dans le segment de cylindre total, qui a pour axe la droite  $\Delta E$ , est au premier des segmens placés dans la figure inscrite, qui a pour axe la droite  $\Delta E$  comme le quarré de  $A\Delta$  est au quarré de  $KE$ ; car ces segmens qui ont une hauteur égale sont entre eux comme leurs bases. Mais les bases de ces segmens qui sont des ellipses semblables, sont entre elles comme les quarrés de leurs diamètres correspondans (6); et les moitiés de ces diamètres sont les droites  $A\Delta$ ,  $KE$ ; et de plus, le quarré de  $A\Delta$  est au quarré de  $KE$  comme  $B\Delta$  est à  $BE$ ; parce que la droite  $B\Delta$  est parallèle au diamètre, que les droites  $A\Delta$ ,  $KE$  sont parallèles à la droite qui touche la parabole au point  $B$ , et que  $B\Delta$  est à  $BE$  comme  $A\Delta$  est à  $E\Xi$  (7). Donc, le premier des segmens placés dans le segment de cylindre total est au premier des segmens placés dans

la figure inscrite comme  $A\Delta$  est à  $E\Xi$ . De même, chacun des autres segmens placés dans le segment de cylindre total, qui a pour axe une droite égale à  $E\Delta$ , est à chacun des segmens correspondans qui sont placés dans la figure inscrite, et qui ont le même axe comme le demi-diamètre des bases est à la partie de ce demi-diamètre placée entre les droites  $AB$ ,  $BD$ . Nous démontrerons, comme nous l'avons fait plus haut, que la figure inscrite est plus grande que le cône  $\Psi$ , et que le segment de cylindre qui a la même base et le même axe que le segment du conoïde, est plus grand que le double de la figure inscrite. Donc, le segment de cylindre sera aussi plus grand que le double du cône  $\Psi$ . Mais il n'est pas plus grand que le double de ce cône, puisqu'il est seulement le double de ce cône. Donc le segment du conoïde n'est pas plus grand que le cône  $\Psi$ . On démontrera de la même manière qu'il n'est pas plus petit. Il est donc évident qu'il lui est égal. Donc, le segment du conoïde est égal à trois fois la moitié du segment de cône qui a la même base et le même axe que ce segment.





Que les sections des plans soient les droites  $AZ$ ,  $ET$ , dont l'une  $ET$  est perpendiculaire sur l'axe, et dont l'autre  $ZA$  ne lui est pas perpendiculaire. Que les droites  $B\Theta$ ,  $\kappa\Lambda$  qui sont les axes des segmens soient égales entre elles et que les sommets des segmens soient les points  $B$ ,  $\Lambda$ . Il faut démontrer que le segment du conoïde dont le sommet est le point  $B$ , est égal au segment du conoïde dont le sommet est le point  $\Lambda$ .

Puisque d'une même parabole, on a retranché deux segmens, dont l'un est  $A\Lambda Z$  et l'autre  $EBT$ , et que leurs diamètres  $\kappa\Lambda$ ,  $\Theta B$  sont égaux entre eux, le triangle  $A\Lambda\kappa$  sera égal au triangle  $E\Theta B$ ; car on a démontré que le triangle  $A\Lambda Z$  est égal au triangle  $EBT$  (4). Menons la droite  $AX$  perpendiculaire sur la droite  $\kappa\Lambda$  prolongée. Puisque les droites  $B\Theta$ ,  $\kappa\Lambda$  sont égales entre elles, les droites  $E\Theta$ ,  $AX$  seront aussi égales entre elles (4). Dans le segment dont le sommet est le point  $B$ , inscrivons un cône qui ait la même base et le même axe que ce segment; et dans le segment dont le sommet est le point  $\Lambda$ , inscrivons un segment de cône qui ait la même base et le même axe que ce



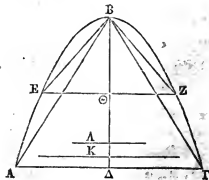
de la surface comprise sous les diamètres de l'ellipse au quarré du diamètre  $EF$  (6); donc le segment de cône dont le sommet est le point  $A$ , et le cône dont le sommet est le point  $B$  sont entre eux en raison composée de la raison de  $KA$  à  $EO$ , et de la raison de  $AM$  à  $BO$ ; car la droite  $KA$  est la moitié du diamètre de la base du segment de cône qui a pour sommet le point  $A$ ; la droite  $EO$  est la moitié du diamètre de la base du cône, et les droites  $AM$ ,  $BO$  sont les hauteurs du segment de cône et du cône (7). Mais  $AM$  est à  $BO$  comme  $AM$  est à  $KA$ , parce que  $BO$  est égal à  $KA$ ; et  $AM$  est à  $KA$  comme  $XA$  est à  $AK$  (8); de plus la raison du segment de cône au cône est composée de la raison de  $KA$  à  $AX$ , car  $AX$  est égal à  $EO$ , et de la raison de  $AM$  à  $BO$ ; et parmi les raisons dont nous venons de parler, la raison de  $AK$  à  $AX$  est la même que la raison de  $AK$  à  $AM$ . Donc le segment de cône est au cône comme  $AK$  est à  $AM$  et comme  $AM$  est à  $BO$ . Mais  $BO$  est égal à  $KA$  (9); il est donc évident que le segment de cône qui a pour sommet le point  $A$  est égal au cône qui a pour sommet le point  $B$ . Il suit évidemment de-là que les segmens du co-

noïde sont égaux, puisque l'un d'eux est égal à trois fois la moitié d'un cône (23), et que l'autre est égal à trois fois la moitié d'un segment de cône qui est égal à ce même cône (24).

### PROPOSITION XXVI.

Si deux segmens d'un conoïde parabolique sont retranchés par un plan conduit d'une manière quelconque, ces segmens sont entre eux comme les quarrés de leurs axes.

Que deux segmens d'un conoïde parabo-



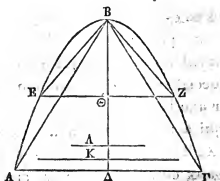
lique soient retranchés comme on voudra; que  $K$  soit égal à l'axe de l'un et  $\Lambda$  égal à l'axe de l'autre. Il faut démontrer que ces

segmens sont entre eux comme les quarrés des droites  $\kappa$ ,  $\Lambda$ .

Coupons le conoïde par un plan conduit par l'axe du segment, et que sa section soit la parabole  $AB\Gamma$ , ayant pour axe la droite  $B\Delta$ . Prenons  $B\Delta$  égal à  $\kappa$ ; et par le point  $\Delta$  conduisons un plan perpendiculaire sur l'axe. Le segment du conoïde qui a pour base le cercle décrit autour de  $AR$  comme diamètre, et pour axe la droite  $B\Delta$ , est égal à un segment qui a un axe égal à  $\kappa$ . Si  $\kappa$  est aussi égal à  $\Lambda$ , il est évident que les segmens seront égaux entre eux; car ils seront égaux chacun à une même quantité solide; mais les quarrés des droites  $\kappa$ ,  $\Lambda$  seront égaux entre eux; donc les segmens seront entre eux comme les quarrés de leurs axes.

Si  $\Lambda$  n'est pas égal à  $\kappa$ , que  $\Lambda$  soit égal à  $B\Theta$ . Par le point  $\Theta$  conduisons un plan perpendiculaire sur l'axe. Le segment qui a pour base le cercle décrit autour de  $EZ$  comme diamètre, et pour axe la droite  $B\Theta$  est égal à un segment qui a un axe égal à  $\Lambda$ . Construisons deux cônes qui aient pour base les cercles décrits autour de  $AR$ ,  $EZ$  comme diamètres, et pour sommet le point  $B$ . Le cône qui

a pour axe la droite  $B\Delta$ , et le cône qui a pour axe la droite  $B\Theta$  sont entre eux en raison composée de la raison du quarré de  $A\Delta$  au quarré de  $\Theta E$ , et de la raison de  $B\Delta$



à  $B\Theta$  ( $\alpha$ ). Mais le quarré de  $A\Delta$  est au quarré de  $\Theta E$  comme  $B\Delta$  est à  $B\Theta$  ( $\zeta$ ); donc, le cône qui a pour axe  $B\Delta$ , et le cône qui a pour axe  $B\Theta$  sont entre eux en raison composée de la raison de  $B\Delta$  à  $\Theta B$  et de la raison de  $B\Delta$  à  $B\Theta$ . Mais cette raison est la même que celle du quarré de  $\Delta B$  au quarré de  $\Theta B$ ; et le cône qui a pour axe la droite  $B\Delta$  est au cône qui a pour axe la droite  $\Theta B$  comme le segment du conoïde qui a pour axe la droite  $\Delta B$  au segment qui a pour axe la droite  $\Theta B$ ; car chacun de ces segmens est égal à trois fois

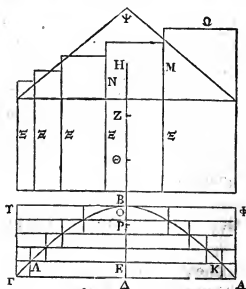
la moitié de chacun de ces cônes (23); de plus, le segment du conoïde qui a un axe égal à  $\kappa$  est égal au segment qui a pour axe la droite  $\text{B}\Delta$ ; le segment du conoïde qui a pour axe une droite égale à  $\Lambda$  est égal au segment qui a pour axe la droite  $\text{O}\text{B}$  (25), et la droite  $\kappa$  est égale à la droite  $\text{B}\Delta$ , et la droite  $\Lambda$  est égale à la droite  $\text{O}\text{B}$ . Il est donc évident que le segment du conoïde qui a un axe égal à  $\kappa$  est au segment du conoïde qui a un axe égal à  $\Lambda$  comme le quarré de  $\kappa$  est au quarré de  $\Lambda$ .

### PROPOSITION XXVII.

Un segment d'un conoïde hyperbolique retranché par un plan perpendiculaire sur l'axe est à un cône qui a la même base et le même axe que ce segment comme une droite composée de l'axe du segment et du triple de la droite ajoutée à l'axe est à une droite composée de l'axe du segment et du double de la droite ajoutée à l'axe.

Retranchons un segment d'un conoïde hyperbolique par un plan perpendiculaire sur l'axe. Coupons ce même segment par un

autre plan conduit par l'axe. Que la section du conoïde soit l'hyperbole  $AB\Gamma$ ; et que la section du plan qui retranche le segment soit



la droite  $A\Gamma$ ; que l'axe du segment soit  $B\Delta$ , et que la droite ajoutée à l'axe soit la droite  $B\Theta$ , et que les droites  $z\Theta$ ,  $zH$  soient égales chacune à  $B\Theta$ . Il faut démontrer que le segment est au cône qui a la même base et le même axe que le segment comme  $H\Delta$  est à  $z\Delta$ .

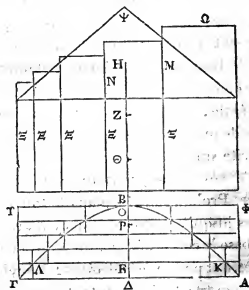
Soit un cylindre qui ait la même base et le même axe que le segment, et dont les côtés soient  $\phi A$ ,  $\gamma\gamma$ . Soit de plus un cône  $\psi$ ; et



que ce cône soit à celui qui a la même base et le même axe  $BA$  que le segment comme  $HA$  est à  $\Delta Z$ . Je dis que le segment du conoïde est égal au cône  $\Psi$ .

Car si le segment du conoïde n'est pas égal au cône  $\Psi$ , il est plus grand ou plus petit. Qu'il soit d'abord plus grand, si cela est possible. Inscrivons dans le segment une figure solide composée de cylindres ayant une hauteur égale, et circonscrivons - lui en une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre que l'excès du segment du conoïde sur le cône  $\Psi$ . Prolongeons les plans de tous ces cylindres jusqu'à la surface du cylindre qui a pour base le cercle décrit autour de  $AR$  comme diamètre et pour axe la droite  $BA$ . Le cylindre total sera partagé en autant de cylindres qu'il y en a dans la figure circonscrite, et chacun de ces cylindres sera égal au plus grand de ceux-ci. Puisque l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est moindre que l'excès du segment sur le cône  $\Psi$ , et que la figure circonscrite est plus grande que le segment, il est évident que la figure inscrite est plus grande que le cône  $\Psi$ .

Que  $BP$  soit le tiers de  $BA$ ; la droite  $HA$  sera triple de  $OP$ . Puisque le cylindre qui a pour base le cercle décrit autour de  $AR$  comme diamètre, et pour axe la droite  $BA$  est au cône



qui a la même base et le même axe comme  $HA$  est à  $OP$ , et que le cône dont nous venons de parler est au cône  $\Psi$  comme  $Z\Delta$  est à  $HA$ ; par raison d'égalité dans la proportion troublée, le cylindre dont nous venons de parler sera au cône  $\Psi$  comme  $Z\Delta$  est à  $OP$ . Soient les droites où se trouve la lettre  $\varepsilon$ ; que leur nombre soit le même que celui

des segmens de la droite  $B\Delta$ , que chacune d'elles soit égale à la droite  $ZB$ , et qu'à chacune d'elles on applique une surface dont la partie excédante soit un quarré; que la plus grande de ces surfaces soit égale à la surface comprise sous  $Z\Delta$ ,  $\Delta B$ , et que la plus petite soit égale à la surface comprise sous  $ZO$ ,  $OB$  ( $\alpha$ ). Les côtés des quarrés se surpasseront également, parce que les segmens de  $B\Delta$  qui leur sont égaux se surpassent également. Que le côté du plus grand quarré où se trouve la lettre  $M$  soit égal à  $B\Delta$ , et le côté du plus petit quarré égal à  $BO$ . Soient ensuite d'autres surfaces dans lesquelles se trouve la lettre  $\Omega$ ; qu'elles soient en même nombre que les premières, et que chacune de ces surfaces soit égale à la plus grande des premières qui est comprise sous  $Z\Delta$ ,  $\Delta B$  ( $\epsilon$ ). Le cylindre qui a pour base le cercle décrit autour de  $AT$  comme diamètre, et pour axe la droite  $\Delta E$  est au cylindre qui a pour base le cercle décrit autour de  $KA$  comme diamètre, et pour axe la droite  $\Delta E$  comme le quarré de  $\Delta A$  est au quarré de  $KE$ . Mais cette dernière raison est la même que la raison de la surface comprise sous  $Z\Delta$ ,  $\Delta B$  à la surface com-

prise sous  $ZE$ ,  $BE$ . Ce qui est une propriété de l'hyperbole; car la droite qui est double de l'ajoutée à l'axe, c'est-à-dire de celle qui est menée du centre est le côté transverse de l'hyperbole ( $\gamma$ ). Mais la surface  $\Sigma M$  est égale à la surface comprise sous  $Z\Delta$ ,  $B\Delta$ , et la surface  $\Sigma N$  est égale à la surface comprise sous  $ZE$ ,  $BE$ ; car la droite  $\Sigma$  est égale à  $ZB$ , la droite  $N$  à  $BE$ , et la droite  $M$  à  $B\Delta$ . Donc, le cylindre qui a pour base le cercle décrit autour de  $AG$  comme diamètre, et pour axe la droite  $\Delta E$  est au cylindre qui a pour base le cercle décrit autour de  $KA$  comme diamètre, et pour axe la droite  $\Delta E$  comme la surface  $\Omega$  est à la surface  $\Sigma N$ . Nous démontrerons semblablement que chacun des autres cylindres qui sont placés dans le cylindre total, et qui ont pour axe une droite égale à  $\Delta E$  est au cylindre qui est dans la figure inscrite et qui a le même axe comme la surface  $\Omega$  est à la surface qui lui est correspondante parmi celles qui sont appliquées à la ligne  $\Sigma$ , et dont les parties excédantes sont des quarrés ( $\delta$ ). On a donc certaines quantités, savoir les cylindres qui sont placés dans le cylindre total, et dont chacun a un axe

égal à la droite  $\Delta E$ , et certaines autres quantités, savoir les surfaces où se trouve la lettre  $\Omega$ , qui sont en même nombre que les premières; et ces quantités sont proportionnelles deux à deux, parce que ces cylindres sont égaux entre eux ainsi que les surfaces  $\Omega$ . Or, quelques-uns de ces cylindres sont comparés avec d'autres cylindres qui sont dans la figure inscrite, le dernier n'étant point comparé avec un autre; et de plus, parmi les surfaces dans lesquelles se trouve la lettre  $\Omega$ , quelques-unes sont comparées avec d'autres surfaces correspondantes qui sont appliquées à la ligne  $\pi$ , et dont les parties excédantes sont des quarrés, sous les mêmes raisons, la dernière n'étant point comparée avec une autre. Il est donc évident que la somme des cylindres qui sont placés dans le cylindre total est à la somme des cylindres qui sont placés dans la figure inscrite comme la somme des surfaces  $\Omega$  est à la somme de toutes celles qui sont appliquées, la plus grande étant exceptée (2). Mais on a démontré que la raison de la somme de toutes les surfaces  $\Omega$  à la somme de toutes les surfaces qui sont appliquées, la plus grande étant ex-

ceptée, est plus grande que la raison de la droite  $m\pi$  à une droite composée de la moitié de  $\pi$  et de la troisième partie de  $m$  (3). Donc la raison du cylindre total à la figure inscrite est plus grande que la raison de  $z\Delta$  à  $op$ , et cette dernière raison est la même que celle du cylindre total au cône  $\nu$ , ainsi que cela a été démontré. Donc la raison du cylindre total à la figure inscrite est plus grande que la raison du cylindre au cône  $\nu$ . Donc le cône  $\nu$  est plus grand que la figure inscrite. Ce qui ne peut être; car on a démontré que la figure inscrite est plus grande que le cône  $\nu$ . Donc le segment du conoïde n'est pas plus grand que le cône  $\nu$ .

Mais il n'est pas plus petit. Car qu'il soit plus petit, si cela est possible. Inscrivons dans le segment une figure solide composée de cylindres ayant une hauteur égale et circoncrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre que l'excès du cône sur le segment; et faisons le reste comme auparavant. Puisque la figure inscrite est plus petite que le segment, et que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite

est plus petit que l'excès du cône sur le segment, il est évident que la figure circonscrite sera plus petite que le cône  $\Psi$ .

Le premier des cylindres placés dans le cylindre total, qui a pour axe la droite  $\Delta E$  est au premier des cylindres placés dans la figure circonscrite, qui a pour axe la droite  $\Delta E$  comme la surface  $\Omega$  est à la surface  $\Sigma M$ ; car ces cylindres sont égaux entre eux, ainsi que ces surfaces. De plus, chacun des autres cylindres qui sont placés dans le cylindre total, et qui ont pour axe une droite égale à  $\Delta E$  est au cylindre qui lui est correspondant dans la figure inscrite, et qui a le même axe, comme la surface  $\Omega$  est à la surface correspondante parmi celles qui sont appliquées à la droite  $\Sigma$ , et dont les parties excédantes sont des quarrés; parce que chacun des cylindres circonscrits, le plus grand étant excepté, est égal à chacun des cylindres inscrits, le plus grand n'étant pas excepté. Donc le cylindre total est à la figure inscrite comme la somme des surfaces  $\Omega$  est à la somme des surfaces qui sont appliquées, et dont les parties excédantes sont des quarrés. Mais on a démontré que la raison de la

somme des surfaces  $\Omega$  à la somme de toutes les autres surfaces est moindre que la raison de la droite  $\varepsilon M$  à une droite composée de la moitié de  $\varepsilon$  et du tiers de  $M$ . Donc la raison du cylindre total à la figure circonscrite sera moindre que la raison de  $z\Delta$  à  $\Theta P$ . Mais  $z\Delta$  est à  $\Theta P$  comme le cylindre total est au cône  $\Psi$ . Donc la raison de ce même cylindre à la figure circonscrite est moindre que la raison de ce cylindre au cône  $\Psi$ . Donc la figure circonscrite est plus grande que le cône  $\Psi$ . Ce qui est impossible ; car on a démontré que la figure circonscrite est plus petite que le cône  $\Psi$ . Donc le segment du conoïde n'est pas plus petit que le cône  $\Psi$ . Donc, puisqu'il n'est ni plus grand ni plus petit, la proposition est démontrée.

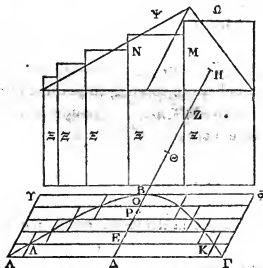
### PROPOSITION XXVIII.

Si un segment d'un conoïde hyperbolique est retranché par un plan non perpendiculaire sur l'axe, le segment du conoïde sera au segment de cône qui a la même base et le même axe que le segment, comme une droite composée de l'axe du segment, et du



triple de la droite ajoutée à l'axe est à une droite composée de l'axe du segment, et du double de la droite ajoutée à l'axe.

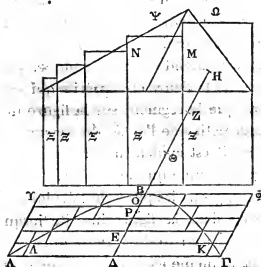
Qu'un segment d'un conoïde hyperbolique soit retranché par un plan, comme



nous l'avons dit. Coupons le segment par un autre plan conduit par l'axe, et perpendiculaire sur le premier. Que cette section soit l'hyperbole  $AB\Gamma$ ; que la section du plan qui retranche le segment soit la droite  $RA$ ; et enfin que le sommet du cône qui contient le conoïde soit le point  $\Theta$ . Par le point  $\Theta$ , conduisons la droite  $\Theta\Psi$  parallèle à  $AR$ ;

cette droite sera tangente à l'hyperbole au point B. Prolongeons la droite qui joint le point  $\Theta$  et le point B; cette droite partagera AR en deux parties égales ( $\alpha$ ); le point B sera le sommet du segment; la droite B $\Delta$ , son axe, et enfin la droite B $\Theta$ , l'ajoutée à l'axe. Que les droites  $\Theta Z$  et ZH soient égales chacune à B $\Theta$ , et par la droite  $\Theta r$ , faisons passer un plan parallèle au plan conduit par AR; ce plan touchera le conoïde au point B. Puisque le plan conduit par AR coupe le conoïde sans être perpendiculaire sur l'axe, la section sera une ellipse qui aura pour grand diamètre la droite rA (14). Puisque l'on a une ellipse décrite autour de AR comme diamètre, et que la droite B $\Delta$  est menée de son centre dans le plan qui passe par le diamètre, et qui est perpendiculaire sur le plan de l'ellipse, on peut trouver un cylindre qui ait son axe sur la droite B $\Delta$ , et dans la surface duquel se trouve l'ellipse décrite autour de AR comme diamètre (10). Ce cylindre étant trouvé, on aura un certain segment de cylindre ayant la même base et le même axe que le segment du conoïde et dont l'autre base sera le plan conduit par  $\Theta r$ . De plus,

on pourra trouver un cône qui ait pour sommet le point B, et dans la surface duquel se trouve l'ellipse décrite autour de AF comme diamètre (9). Ce cône étant trouvé, on aura un segment de cône ayant la même base et



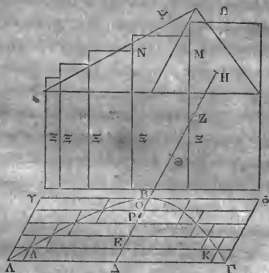
le même axe que le segment du cylindre et le segment du conoïde. Il faut démontrer que le segment du conoïde est au segment de cône dont nous venons de parler comme  $H\Delta$  est à  $\Delta Z$ .

• Que  $H\Delta$  soit à  $\Delta Z$  comme le cône  $\Psi$  est au segment de cône. Je dis que le segment du conoïde sera égal au cône  $\Psi$ ; car si le seg-

ment du conoïde n'est pas égal au cône  $\Psi$ , qu'il soit plus grand, si cela est possible. Inscrivons dans le segment du conoïde une figure solide composée de segmens de cylindres qui aient une hauteur égale, et circonscrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre que l'excès du segment du conoïde sur le cône  $\Psi$ . Puisque l'excès de la figure circonscrite qui est plus grande que le segment sur la figure inscrite est plus petit que l'excès du segment sur le cône  $\Psi$ , il est évident que la figure inscrite sera plus grande que le cône  $\Psi$ .

Prolongeons les plans de tous les segmens qui sont dans la figure inscrite jusqu'à la surface du segment de cylindre qui a la même base et le même axe que le segment du conoïde. Que  $BP$  soit la troisième partie de  $B\Delta$ ; et faisons le reste comme auparavant. Le premier des segmens placés dans le segment total de cylindre, qui a pour axe la droite  $\Delta E$  est au premier des segmens placés dans la figure inscrite, qui a pour axe  $\Delta E$  comme le carré de  $AD$  est au carré de  $KE$ ; car les segmens qui ont la même hauteur sont entre eux

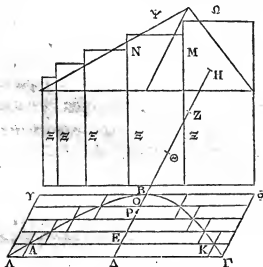
comme leurs bases. Mais les bases sont des ellipses semblables; donc ces bases sont entre elles comme les quarrés des diamètres correspondans (7). Mais le quarré de  $\Lambda\Delta$  est au



quarré de  $\text{KE}$  comme la surface comprise sous  $\text{Z}\Delta$ ,  $\Delta\text{B}$  est à la surface comprise sous  $\text{ZE}$ ,  $\text{EB}$ ; parce que l'on a mené la droite  $\text{Z}\Delta$  du point  $\Theta$  où les asymptotes se rencontrent, et que les droites  $\text{A}\Delta$ ,  $\text{KE}$  sont parallèles à la tangente menée par le point  $\text{B}$  (6): de plus, la surface comprise sous  $\text{Z}\Delta$ ,  $\Delta\text{B}$  est égale à la surface  $\Omega$ , et la surface comprise sous  $\text{ZE}$ ,  $\text{EB}$  est égale à la surface  $\Xi\text{N}$ . Donc le

premier des segmens placés dans le segment total, qui a pour axe la droite  $\Delta E$  est au premier segment qui est placé dans la figure inscrite, et qui a pour axe la droite  $\Delta E$  comme la surface  $\Omega$  est à la surface  $\Xi N$ . De même chacun des autres segmens qui sont placés dans le segment total, et qui ont pour axe une droite égale à  $\Delta E$  est au segment correspondant qui est placé dans la figure inscrite, et qui a pour axe une droite égale à  $\Delta E$ , comme la surface  $\Omega$  est à la surface correspondante parmi les surfaces qui sont appliquées à la droite  $\Xi X$ , et dont les parties excédantes sont des quarrés. On a donc certaines quantités, savoir les segmens qui sont placés dans le cylindre total, et certaines autres quantités, savoir les surfaces où se trouve la lettre  $\Omega$ , qui sont en même nombre que les segmens, et qui sont proportionnelles deux à deux. Mais ces segmens sont comparés avec d'autres segmens qui sont dans la figure inscrite; et le dernier n'est point comparé avec un autre; et de plus, les surfaces  $\Omega$  sont comparées, sous les mêmes raisons, avec d'autres surfaces correspondantes qui sont appliquées à la ligne  $\Xi$ ; et dont les parties

excédantes sont des quarrés; et la dernière n'est point comparée avec une autre. Il est donc évident que la somme des premiers segmens est à la somme des seconds comme



la somme de toutes les surfaces  $\Omega$  est à la somme de toutes celles qui sont appliquées, la plus grande étant exceptée (2). Mais la raison de la somme des surfaces  $\Omega$  à la somme de toutes surfaces appliquées, la plus grande étant exceptée, est plus grande que la raison de la droite  $M\Xi$  à une droite composée de la moitié de  $\Xi$  et du tiers de  $M$  (2). Donc, la raison du segment total à la figure inscrite

est plus grande que la raison de la droite  $\Xi M$  à une droite composée de la moitié de  $\Xi$  et du tiers de  $M$ ; et par conséquent plus grande que la raison de  $Z\Delta$  à  $\Theta P$ . Donc, la raison du segment total à la figure inscrite est plus grande que la raison du segment total au cône  $\Psi$ . Ce qui est impossible; car on a démontré que la figure inscrite est plus grande que le cône  $\Psi$ . Donc le segment du conoïde n'est pas plus grand que le cône  $\Psi$ .

Si l'on suppose que le segment du conoïde est plus petit que le cône  $\Psi$ , nous inscrirons dans ce segment une figure solide composée de segmens de cylindre qui aient la même hauteur, et nous lui en circonscrivons une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre que l'excès du cône  $\Psi$  sur le segment. Nous démontrerons de la même manière que la figure circonscrite est plus petite que le cône  $\Psi$ ; et que la raison du segment de cylindre qui a la même base et le même axe que le segment du conoïde à la figure circonscrite est moindre que la raison de ce segment de cylindre au cône  $\Psi$ . Ce qui ne peut être. Donc le segment du



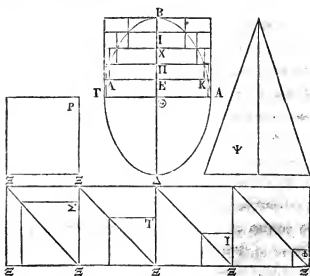
conoïde n'est pas plus petit que le cône  $\Psi$  ; donc la proposition est évidente.

### PROPOSITION XXIX.

La moitié d'un sphéroïde quelconque coupé par un plan conduit par le centre, et perpendiculaire sur l'axe est double du cône qui a la même base et le même axe que le segment.

Qu'un sphéroïde soit coupé par un plan conduit par le centre et perpendiculaire sur l'axe ; qu'il soit encore coupé par un autre plan conduit par l'axe ; que la section du sphéroïde soit l'ellipse  $AB\Gamma\Delta$ , ayant pour diamètre l'axe du sphéroïde  $B\Delta$ , et pour centre le point  $\Theta$  : il est indifférent que  $B\Delta$  soit le grand ou le petit diamètre de l'ellipse. Que la section du plan qui coupe le segment soit la droite  $\Gamma A$ . Cette droite passera par le centre, et fera des angles droits avec  $B\Delta$  ; parce que l'on suppose que ce plan passe par le centre, et qu'il est perpendiculaire sur l'axe. Il faut démontrer que le segment qui est la moitié du sphéroïde, et qui a pour base le cercle décrit autour de  $AR$  comme diamètre,

et pour sommet le point B, est double du cône qui a la même base et le même axe que ce segment.

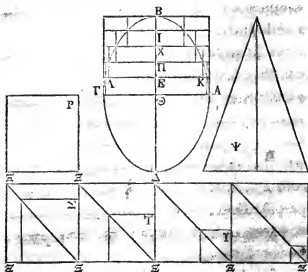


Que le cône  $\Psi$  soit double de celui qui a la même base et le même axe  $OB$  que le segment. Je dis que la moitié du sphéroïde est égale au cône  $\Psi$ . Car si la moitié du sphéroïde n'est pas égale au cône  $\Psi$ , supposons d'abord qu'elle soit plus grande, si cela est possible. Dans le segment qui est la moitié du sphéroïde, inscrivons une figure solide composée de cylindres, ayant une hauteur égale, et circonscrivons-lui en une autre,

de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre que l'excès du demi-sphéroïde sur le cône  $\Psi$ . Puisque la figure circonscrite est plus grande que le demi-sphéroïde, l'excès du demi-sphéroïde sur la figure inscrite sera plus petit que l'excès du demi-sphéroïde sur le cône  $\Psi$ , il est évident que la figure inscrite dans le demi-segment sera plus grande que le cône  $\Psi$ .

Soit un cylindre qui ait pour base le cercle décrit autour de  $AR$  comme diamètre, et pour axe la droite  $BO$ . Puisque ce cylindre est triple du cône qui a la même base et le même axe que le segment, et que le cône  $\Psi$  est double de ce cône, il est évident que ce cylindre sera égal à trois fois la moitié du cône  $\Psi$ . Prolongeons les plans de tous les cylindres dont la figure inscrite est composée jusqu'à la surface du cylindre qui a la même base et le même axe que le segment. Le cylindre total sera partagé en autant de cylindres qu'il y en a dans la figure circonscrite, et chacun de ces cylindres sera égal au plus grand de ceux-ci. Prenons des droites qui se trouve la lettre  $\pi$ ; que ces droites soient en

même nombre que les segmens de la droite  $B\Theta$ , et que chacune d'elles soit égale à la droite  $B\Theta$  : sur chacune d'elles décrivons un



quarré. Du dernier de ces quarrés retranchons un gnomon qui ait pour largeur la droite  $BI$ ; ce gnomon sera égal à la surface comprise sous  $BI$ ,  $IA$  (6). Du quarré suivant retranchons un gnomon qui ait une largeur double de  $BI$ ; ce gnomon sera égal à la surface comprise sous  $BX$ ,  $XA$ . Continuons de retrancher de chaque quarré qui suit un gnomon qui ait une largeur plus grande d'un segment que la largeur du gnomon qui

précède; chacun de ces gnomons sera égal à une surface comprise sous deux segmens de  $B\Delta$ , un de ces segmens étant égal à la largeur du gnomon. Mais le quarré qui reste du second quarré a un côté égal à la droite  $\Theta E$  ( $\gamma$ ); donc le premier des cylindres placés dans le cylindre total, qui a pour axe la droite  $\Theta E$  est au premier des cylindres placés dans la figure inscrite, qui a pour axe la même droite  $\Theta E$  comme le quarré de  $A\Theta$  est au quarré de  $KE$ , et par conséquent comme la surface comprise sous  $B\Theta$ ,  $\Theta\Delta$  est à la surface comprise sous  $BE$ ,  $E\Delta$  ( $\delta$ ). Donc le premier cylindre est au second cylindre comme le premier quarré est au gnomon qui a été retranché du second quarré. Semblablement, chacun des autres cylindres qui ont pour axe une droite égale à  $\Theta E$  sera au cylindre qui est dans la figure inscrite, et qui a le même axe comme le quarré qui lui correspond est au gnomon qui a été retranché du quarré suivant. On a donc certaines quantités, savoir les cylindres qui sont placés dans le cylindre total, et certaines autres quantités, savoir les quarrés des droites  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  qui sont en même nombre que les cylindres; et ces quantités sont

proportionnelles deux à deux. Mais ces cylindres sont comparés à d'autres quantités, savoir aux cylindres placés dans la figure inscrite, et le dernier n'est point comparé à un autre; et les quarrés sont comparés à d'autres quantités dans les mêmes raisons, savoir aux gnomons correspondans qui sont retranchés des quarrés, et le dernier quarré n'est point comparé à un autre. Donc la somme de tous les cylindres placés dans le cylindre total est à la somme de tous les autres cylindres comme la somme de tous les quarrés est à la somme de tous les gnomons qui en sont retranchés (5). Donc le cylindre qui a la même base et le même axe que le segment est à la figure inscrite comme la somme de tous les quarrés est à la somme de tous les gnomons qui en sont retranchés. Mais la somme de ces quarrés est plus grande que trois fois la moitié de la somme des gnomons qui en sont retranchés. En effet, on a pris certaines lignes  $\Xi P$ ,  $\Xi \Sigma$ ,  $\Xi T$ ,  $\Xi \Upsilon$ ,  $\Xi \Phi$  qui se surpassent également, et dont la plus petite est égale à leur excès; l'on a pris de plus d'autres lignes désignées par les lettres  $\Xi \Xi$  qui sont en même nombre que les pre-

mières, et dont chacune est égale à la plus grande des dernières. Donc la somme des quarrés construits sur les lignes dont chacune est égale à la plus grande est plus petite que le triple de la somme des quarrés construits sur les droites qui se surpassent également; et si l'on retranche le quarré construit sur la plus grande droite, cette somme sera plus grande que le triple de la somme des quarrés restans; ce qui a été démontré dans les choses que nous avons publiées sur les hélices (10, *cor.*). Mais puisque la somme de tous ces quarrés est plus petite que le triple de la somme des autres quarrés qui ont été retranchés de ceux-ci; il est évident que cette somme est plus grande que trois fois la moitié de la somme des surfaces restantes ( $\alpha$ ). Donc cette somme est plus grande que trois fois la moitié de la somme des gnomons. Donc aussi le cylindre qui a la même base et le même axe que le segment est plus grand que trois fois la moitié de la figure inscrite (6). Ce qui est impossible; car ce cylindre est égal à trois fois la moitié du cône  $\nu$ , et l'on a démontré que la figure inscrite est plus grande que le cône  $\nu$ . Donc

la moitié du sphéroïde n'est pas plus grande que le cône  $\Psi$ .

La moitié du sphéroïde n'est pas plus petite que le cône  $\Psi$ . Qu'elle soit plus petite, si cela est possible. Inscrivons de nouveau dans la moitié du sphéroïde une figure solide composée de cylindres qui aient la même hauteur; et circonscrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit plus petit que l'excès du cône  $\Psi$  sur la moitié du sphéroïde; et faisons le reste comme auparavant. Puisque la figure inscrite est plus petite que le segment, il est évident que la figure circonscrite sera plus petite que le cône  $\Psi$ .

Le premier des cylindres placés dans le cylindre total, qui a pour axe la droite  $\Theta E$  est au premier des cylindres placés dans la figure circonscrite, qui a pour axe la droite  $\Theta E$ , comme le premier carré est à ce même carré. Le second des cylindres placés dans le cylindre total, qui a pour axe la droite  $E \Pi$  est au second des cylindres placés dans la figure circonscrite, qui a pour axe la droite  $E \Pi$ , comme le second carré est au



gnomon qui en est retranché. De même, chacun des autres cylindres qui sont placés dans le cylindre total, et qui ont pour axe une droite égale à  $\Theta E$  est au cylindre correspondant qui est placé dans la figure circonscrite, et qui a le même axe, comme le quarré correspondant est au gnomon qui en est retranché. Donc la somme de tous les cylindres qui sont placés dans le cylindre total est à la somme de tous les cylindres qui sont placés dans la figure circonscrite comme la somme de tous les quarrés est à une surface égale à la somme du premier quarré, et des gnomons qui sont retranchés des autres quarrés (2). Mais la somme de tous les quarrés est plus petite trois fois la moitié d'une surface égale à la somme du premier quarré, et des gnomons qui sont retranchés des autres quarrés; parce que cette somme est plus grande que le triple de la somme des quarrés construits sur les droites inégales, le quarré construit sur la plus grande droite étant excepté (*Hélices, pro. 10. cor.*). Donc, le cylindre qui a la même base et le même axe que le segment est plus petit que trois fois la moitié de la figure circonscrite. Ce qui

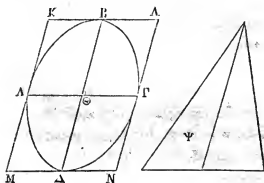
ne peut être; car ce cylindre est égal à trois fois la moitié du cône  $\Psi$ ; et l'on a démontré que la figure circonscrite est plus petite que le cône  $\Psi$ . Donc la moitié du sphéroïde n'est pas plus petite que le cône  $\Psi$ . Donc elle lui est égale, puisqu'elle n'est ni plus grande ni plus petite.

### PROPOSITION XXX.

Si un sphéroïde quelconque est coupé par un plan conduit par le centre et non perpendiculaire sur l'axe, la moitié du sphéroïde sera encore double d'un segment de cône qui aura la même base et le même axe que le segment.

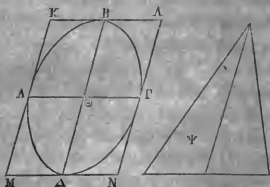
Coupons le sphéroïde. Coupons-le ensuite par un autre plan conduit par l'axe et perpendiculaire sur le plan coupant; que la section du sphéroïde soit l'ellipse  $AB\Gamma\Delta$ , dont le centre est le point  $\Theta$ ; et que la section du plan coupant soit la droite  $AR$ . Cette droite passera par le point  $\Theta$ ; parce qu'on a supposé que le plan étoit conduit par le centre. On aura donc une certaine ellipse décrite autour de  $AR$  comme diamètre  $AR$ ,

parce qu'on a supposé que le plan coupant n'étoit pas perpendiculaire sur l'axe. Menons les droites  $\kappa\lambda$ ,  $\mu\nu$  parallèles à  $\alpha\Gamma$ ; et que ces droites soient tangentes à l'ellipse



aux points  $B, \Delta$ ; et par ces droites faisons passer des plans parallèles à celui qui a été conduit par la droite  $\alpha\Gamma$ . Ces plans toucheront le sphéroïde aux points  $B, \Delta$ , la droite qui joint les points  $B, \Delta$  passera par le point  $\Theta$  (18); les sommets des segmens seront les points  $B, \Delta$ , et les axes les droites  $B\Theta, \Theta\Delta$ . On peut donc trouver un cylindre dont l'axe soit la droite  $B\Theta$ , dans la surface duquel se trouve l'ellipse décrite autour de  $\alpha\Gamma$  comme diamètre (10). Ce cylindre étant trouvé, on aura un segment de cylindre qui aura la même base et le même axe que la moitié du

sphéroïde. On peut de plus trouver un cône qui ait son sommet au point B, et dans la surface duquel se trouve l'ellipse décrite autour de AR comme diamètre (9). Ce cône étant



trouvé, on aura un certain segment de cône qui aura la même base et le même axe que le segment du sphéroïde. Je dis que la moitié du sphéroïde est double de ce cône.

Que le cône  $\Psi$  soit double de ce segment de cône. Si la moitié du sphéroïde n'est pas égale au cône  $\Psi$ , qu'il soit plus grand, si cela est possible. Inscrivons dans la moitié du sphéroïde une figure composée de segmens de cylindre qui aient une hauteur égale, et circonscrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit plus petit que l'excès de

la moitié du sphéroïde sur le cône  $\Psi$ . Nous démontrerons de la même manière que nous l'avons fait plus haut, que la figure inscrite est plus grande que le cône  $\Psi$ ; que le segment de cylindre qui a la même base et le même axe que ce segment est égal à trois fois la moitié du cône  $\Psi$ ; et que ce segment est plus grand que trois fois la moitié de la figure inscrite dans la moitié du sphéroïde. Ce qui ne peut être. Donc la moitié du sphéroïde n'est pas plus grande que le cône  $\Psi$ .

Que la moitié du sphéroïde soit plus petite que le cône  $\Psi$ . Inscrivons dans la moitié du sphéroïde une figure solide composée de segmens de cylindres qui aient une hauteur égale, et circonscrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit plus petit que l'excès du cône  $\Psi$  sur la moitié du sphéroïde. Nous démontrerons encore, comme nous l'avons fait plus haut, que la figure circonscrite est plus petite que le cône  $\Psi$ ; que le segment de cylindre qui a la même base et le même axe que le segment du sphéroïde est égal à trois fois la

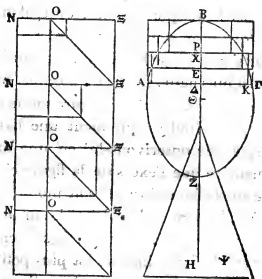
moitié du cône  $\Psi$ ; et que ce segment est plus petit que trois fois la moitié de la figure circonscrite. Ce qui ne peut être. Donc la moitié du sphéroïde n'est pas plus petite que le cône  $\Psi$ . Mais si la moitié du sphéroïde n'est ni plus grande ni plus petite que ce cône, elle lui est égale. Donc la proposition est évidente.

### PROPOSITION XXXI.

Le segment d'un sphéroïde quelconque coupé par un plan perpendiculaire sur l'axe qui ne passe pas par le centre est au cône qui a la même base et le même axe que ce segment, comme une droite composée de la moitié de l'axe du sphéroïde, et de l'axe du plus grand segment est à l'axe du plus grand segment.

Qu'un segment quelconque d'un sphéroïde soit retranché par un plan perpendiculaire sur l'axe, sans passer par le centre; que ce même segment soit coupé par un autre plan conduit par l'axe; que la section du sphéroïde soit l'ellipse  $AB\Gamma$ , dont le diamètre  $BZ$  est l'axe du sphéroïde, et dont le centre

est le point  $\Theta$ ; et que la section du plan qui retranche le segment soit la droite  $AR$ . Cette droite sera perpendiculaire sur  $BZ$ ; parce



que l'on a supposé que le plan coupant étoit perpendiculaire sur l'axe. Que le segment qui est produit par cette section, et qui a son sommet au point  $B$  soit plus petit que la moitié du sphéroïde; et que  $ZH$  soit égal à  $B\Theta$ . Il faut démontrer que le segment qui a pour sommet le point  $B$  est au cône qui a la même base et le même axe que ce segment comme  $\Delta H$  est à  $\Delta Z$ .

Soit un cylindre qui ait la même base et

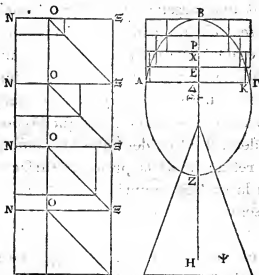
le même axe que le plus petit segment. Prenons de plus un cône  $\Psi$  qui soit au cône qui a la même base et le même axe comme  $\Delta H$  est à  $\Delta Z$ . Je dis que le cône  $\Psi$  est égal au segment qui a son sommet au point B. —

Car si ce cône ne lui est pas égal, qu'il soit d'abord plus petit, si cela est possible. Inscrivons dans le segment une figure solide composée de cylindres qui aient une hauteur égale, et circoncrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre que l'excès du segment du sphéroïde sur le cône  $\Psi$  (21). Puisque l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est plus petit que l'excès du segment sur ce cône, il est évident que la figure inscrite est plus grande que le cône  $\Psi$ .

Que BP soit la troisième partie de BA. Puisque BH est triple de BΘ, et BA triple de BP, la droite ΔH sera triple de ΘP. Donc le cylindre qui a la même base que le segment, et pour axe la droite BA est au cône qui a la même base et le même axe comme ΔH est à ΘP. Mais le cône dont nous venons de parler est au cône  $\Psi$  comme ΔZ est à ΔH.



Donc, par raison d'égalité dans la proportion troublée, le cylindre qui a la même base et le même axe que le segment est au



cône  $\Psi$  comme  $\Delta Z$  est à  $\Theta P$ . Prenons à présent les lignes dans lesquelles sont les lettres  $\Xi N$ ; supposons que ces droites soient en même nombre que les segmens qui sont dans la droite  $B\Delta$ , et qu'elles soient égales chacune à la droite  $Z\Delta$ . Que chacune des droites  $\Xi O$  soit égale à la droite  $B\Delta$ . Chacune des droites restantes  $NO$  sera double de la droite  $\Theta\Delta$  (6). Appliquons à chacune des droites  $N\Xi$  une surface qui ait une largeur égale à  $B\Delta$ ;

dans chacune de ces surfaces construisons un quarré, et menons sa diagonale. Retranchons de la première de ces surfaces un gnomon qui ait une largeur égale à  $BE$  ; retranchons de la seconde un gnomon qui ait une largeur égale à  $BX$  ; retranchons de la même manière de chaque surface qui suit immédiatement un gnomon qui ait une largeur plus petite d'un segment de  $BD$  que le gnomon précédent. Il est évident que le gnomon qui a été retranché de la première surface sera égal à la surface comprise sous  $BE$ ,  $EZ$ , et le reste sera une surface appliquée sur  $NO$ , dont la partie excédante sera un quarré qui a pour côté une droite égale à  $\Delta E$  ( $\gamma$ ). Le gnomon qui est retranché de la seconde surface sera égal à la surface comprise sous  $ZX$ ,  $XB$ , et le reste sera une surface appliquée sur  $NO$  dont la partie excédante sera un quarré ; et ainsi de suite. Cela étant ainsi, prolongeons les plans de tous les cylindres dont la figure inscrite dans le segment est composée jusqu'à la surface du cylindre qui a la même base et le même axe que le segment. Le cylindre total sera partagé en autant de cylindres qu'il y en a dans la figure circonscrite, et cha-

cun de ces cylindres sera égal au plus grand de ces derniers. Le premier des cylindres placés dans le cylindre total, qui a pour axe la droite  $\Delta E$ , est au premier des cylindres placés dans la figure inscrite, qui a pour axe la droite  $\Delta E$  comme le quarré de  $\Delta \Gamma$  est au quarré de  $KE$ . Mais cette dernière raison est la même que celle de la surface comprise sous  $B\Delta$ ,  $\Delta Z$  à la surface comprise sous  $BE$ ,  $EZ$ . Donc le premier des cylindres placés dans le cylindre total est au premier des cylindres placés dans la figure inscrite comme la première surface est au gnomon qui en a été retranché. Semblablement, chacun des autres cylindres qui sont placés dans le cylindre total, et qui ont pour axe une droite égale à  $\Delta E$  sera au cylindre correspondant qui est placé dans la figure inscrite et qui a le même axe, comme la surface qui lui correspond est au gnomon qui en a été retranché. On a donc certaines quantités, savoir les cylindres qui sont placés dans le cylindre total; on a de plus certaines autres quantités, savoir les surfaces qui sont appliquées sur  $\Delta N$ , et qui ont pour largeur une droite égale à  $B\Delta$ ; et ces dernières quantités

sont en même nombre que les cylindres, et leur sont proportionnelles deux à deux. Mais ces cylindres sont comparés à d'autres cylindres qui sont dans la figure inscrite, le dernier n'étant point comparé à un autre; et ces surfaces sont comparées à d'autres semblablement placées, dans des raisons égales, c'est-à-dire aux gnomons qui sont retranchés de ces premières surfaces, et la dernière surface n'est point comparée avec une autre. Il est donc évident que la somme de tous les premiers cylindres est à la somme de tous les autres cylindres comme la somme de toutes ces surfaces est à la surface de tous les gnomons (2). Donc le cylindre qui a la même base et le même axe que le segment est à la figure inscrite comme la somme de toutes ces surfaces est à la somme de tous les gnomons. Mais l'on a certaines lignes égales dans lesquelles sont les lettres  $NO$ , et à chacune desquelles on a appliqué une surface dont la partie excédante est un quarré; les côtés des quarrés se surpassent également, et cet excès est égal au côté du plus petit quarré: on a de plus d'autres surfaces appliquées à  $NE$ , qui ont pour largeur une droite

égale à  $B\Delta$ , qui sont en même nombre que les premières, et dont chacune est égale à la plus grande de celles-ci. Il est donc évident que la raison de la somme de toutes les surfaces dont chacune est égale à la plus grande, à la somme de toutes les autres est moindre que la raison de  $\Xi N$  à une droite composée de la moitié de  $NO$  et du tiers de  $\Xi O$  (3). Il est donc évident que la raison de la somme de ces surfaces à la somme des gnomons est plus grande que la raison de la droite  $\Xi N$  à une droite composée de la moitié de  $NO$  et des deux tiers de  $\Xi O$  (4). Donc la raison du cylindre qui a la même base et le même axe que le segment à la figure inscrite dans le segment est plus grande que la raison de  $\Xi N$  à une droite composée de la moitié de  $NO$  et des deux tiers de  $OE$ . Mais la droite  $\Delta Z$  est égale à  $\Xi N$ ; la droite  $\Delta\Theta$  est égale à la moitié de  $NO$ , et la droite  $\Delta P$  égale aux deux tiers de  $\Xi O$ ; donc la raison du cylindre total à la figure inscrite dans le segment est plus grande que la raison de  $\Delta Z$  à  $\Theta P$ . Mais l'on a démontré que le cylindre est au cône  $\Psi$  comme  $\Delta Z$  est à  $\Theta P$ ; donc la raison du cylindre à la figure inscrite est plus grande

que la raison de ce même cylindre au cône  $\Psi$ . Ce qui ne peut être ; car on a démontré que la figure inscrite est plus grande que le cône  $\Psi$ . Donc le segment du sphéroïde n'est pas plus grand que le cône  $\Psi$ .

Que ce segment soit plus petit que le cône  $\Psi$ , si cela est possible. Inscrivons de nouveau dans le segment une figure solide composée de cylindres qui aient une hauteur égale, et circonscrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit plus petit que l'excès du cône  $\Psi$  sur le segment, et faisons le reste comme auparavant. Puisque la figure inscrite est plus petite que le segment, et que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est plus petit que l'excès du cône  $\Psi$  sur le segment, il est évident que la figure circonscrite est plus petite que le cône  $\Psi$ .

Le premier des cylindres placés dans le cylindre total, qui a pour axe la droite  $\Delta E$  est au premier des cylindres placés dans la figure circonscrite, qui a le même axe, comme la dernière des surfaces qui sont appliquées à  $\Xi N$ , et qui ont une largeur égale à la droite  $B\Delta$  est à cette même surface ; car

ces cylindres sont égaux, ainsi que ces surfaces; le second des cylindres placés dans le cylindre total, qui a pour axe une droite égale à  $\Delta E$  est au cylindre correspondant dans la figure circonscrite comme la première des surfaces qui sont appliquées à  $\Sigma A$ , et qui ont une largeur égale à  $B\Delta$  est au gnomon qui en est retranché; et chacun des autres cylindres qui sont placés dans le cylindre total et qui ont un axe égal à la droite  $\Delta E$  est au cylindre qui lui est correspondant dans la figure circonscrite comme la surface qui lui est correspondante parmi celles qui sont appliquées à  $\Sigma N$  est au gnomon qui en a été retranché avant celui qu'on nomme le dernier. Donc, par la même raison qu'auparavant, la somme de tous les cylindres placés dans le cylindre total est à la somme de tous les cylindres placés dans la figure circonscrite comme la somme de toutes les surfaces qui sont appliquées à  $\Sigma N$  est à une surface composée de la dernière surface et de tous les gnomons qui sont retranchés des autres surfaces. Puisque l'on a démontré que la raison de la somme de toutes les surfaces appliquées à  $\Sigma N$  à la somme de

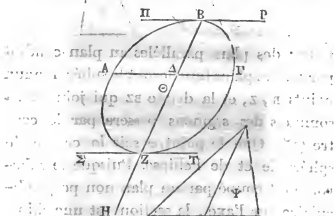
toutes les surfaces qui sont appliquées à  $NO$ , et dont les parties excédantes sont des carrés, la plus grande étant exceptée, est plus grande que la raison de  $EN$  à une droite égale composée de la moitié de  $NO$  et du tiers de  $EO$ , il est évident que la raison de la somme de ces mêmes surfaces à la somme des surfaces restantes, savoir la dernière surface et les gnomons qui sont retranchés des surfaces restantes est moindre que la raison de la droite de  $EN$  à une droite composée de la moitié de  $NO$  et des deux tiers de  $EO$ . Il est donc évident que la raison du cylindre qui a la même base et le même axe que le segment à la figure circonscrite est moindre que la raison de  $Z\Delta$  à  $OP$ . Mais la raison du cylindre dont nous venons de parler au cône  $\Psi$  est la même que celle de  $\Delta Z$  à  $OP$ , donc la raison du cylindre à la figure circonscrite est moindre que la raison de ce même cylindre au cône  $\Psi$ . Ce qui ne peut être; car on a démontré que la figure circonscrite est plus petite que le cône  $\Psi$ . Donc le segment du sphéroïde n'est pas plus petit que le cône  $\Psi$ . Donc il lui est égal, puisqu'il n'est ni plus grand ni plus petit.



## PROPOSITION XXXII.

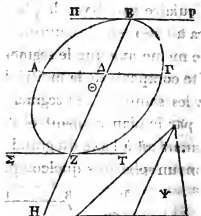
Si un sphéroïde est coupé par un plan qui ne passe pas par le centre, et qui ne soit pas perpendiculaire sur l'axe, le plus petit segment sera au segment de cône qui a la même base et le même axe que le segment comme une droite composée de la moitié de la droite qui joint les sommets des segmens qui sont produits par le plan coupant et de l'axe du petit segment est à l'axe du grand segment.

Coupons un sphéroïde quelconque, comme



nous venons de le dire. Coupons ensuite le sphéroïde par un plan conduit par l'axe et perpendiculaire sur le premier; que cette

section du sphéroïde soit l'ellipse  $AB\Gamma\Delta$ , et que la section du plan qui retranche le segment soit la droite  $\Gamma A$ . Menons à la droite  $AR$  les parallèles  $NP$ ,  $\Sigma T$  qui touchent l'ellipse aux points  $B$ ,  $Z$ ; et par ces parallèles faisons



passer des plans parallèles au plan conduit par  $AR$ . Ces plans toucheront le sphéroïde aux points  $B$ ,  $Z$ , et la droite  $BZ$  qui joindra les sommets des segmens passera par le centre (18). Que le point  $\Theta$  soit le centre du sphéroïde et de l'ellipse. Puisque le sphéroïde est coupé par un plan non perpendiculaire sur l'axe, la section est une ellipse qui a pour diamètre la droite  $AR$  (15). Prenons un cylindre dont l'axe soit la droite  $B\Delta$ , et dans la surface duquel se trouve l'ellipse

décrite autour de  $AR$  comme diamètre (10). Prenons aussi un cône qui ait son sommet au point  $B$ , et dans la surface duquel se trouve l'ellipse décrite autour de  $AR$  comme diamètre (9). On aura un certain segment de cylindre ayant la même base et le même axe que le segment du sphéroïde; on aura aussi un certain segment de cône ayant la même base et le même axe que le segment du sphéroïde. Il faut démontrer que le segment du sphéroïde dont le sommet est le point  $B$  est au segment de cône qui a la même base et le même axe que ce segment, comme  $\Delta H$  est à  $\Delta Z$ .

Que la droite  $ZH$  soit égale à la droite  $OZ$ . Prenons un cône  $\Psi$  qui soit au segment de cône qui a la même base et le même axe que le segment du sphéroïde, comme  $\Delta H$  est à  $\Delta Z$ . Si le segment du sphéroïde n'est pas égal au cône  $\Psi$ , qu'il soit d'abord plus grand, si cela est possible. Inscrivons dans le segment du sphéroïde une figure solide composée de segmens de cylindre qui aient une hauteur égale, et circonscrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit

plus petit que l'excès du segment du sphéroïde sur le cône  $\Psi$ . On démontrera, comme nous l'avons fait plus haut, que la figure inscrite est plus grande que le cône  $\Psi$ , et que la raison du segment de cylindre qui a la même base et le même axe que le segment à la figure inscrite est plus grande que la raison de ce segment de cylindre au cône  $\Psi$ . Ce qui ne peut être. Donc le segment du sphéroïde n'est pas plus grand que le cône  $\Psi$ .

Qu'il soit plus petit, si cela est possible. Inscrivons de nouveau dans le segment du sphéroïde une figure solide composée de segments de cylindre qui aient une hauteur égale, et circonscrivons-lui en une autre, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit moindre que l'excès du cône  $\Psi$  sur le segment du sphéroïde. On démontrera de la même manière que nous l'avons fait plus haut, que la figure circonscrite est plus petite que le cône  $\Psi$ , et que la raison du segment de cylindre qui a la même base et le même axe que le segment du sphéroïde à la figure circonscrite est moindre que la raison du segment de cylindre au cône  $\Psi$ . Ce qui ne peut être. Donc

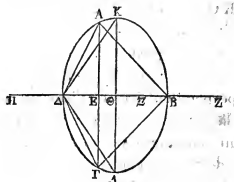
le segment du sphéroïde n'est pas plus petit que le cône  $\Psi$ . Donc ce qu'il falloit démontrer est évident.

### PROPOSITION XXXIII.

Le grand segment d'un sphéroïde quelconque coupé non par son centre par un plan perpendiculaire sur l'axe est au cône qui a la même base et le même axe que ce segment, comme une droite composée de la moitié de l'axe du sphéroïde et de l'axe du petit segment est à l'axe du petit segment.

Coupons un sphéroïde quelconque comme on vient de le dire; que ce même sphéroïde soit coupé par un autre plan conduit par l'axe et perpendiculaire sur le premier; que cette section soit l'ellipse  $AB\Gamma$  ayant pour diamètre la droite  $ED$  qui est l'axe du sphéroïde, et que la section du plan qui retranche le segment soit la droite  $IA$ . Cette droite sera perpendiculaire sur  $ED$ . Que le grand segment soit celui qui a son sommet au point  $B$ , et que le centre du sphéroïde soit le point  $\Theta$ . Faisons les droites  $\Delta H$ ,  $BZ$  chacune égale à  $\Delta\Theta$ . Il faut démontrer que le segment du

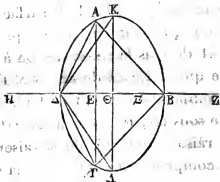
sphéroïde dont le sommet est le point B est au cône qui a la même base et le même axe que ce segment comme EH est à EΔ.



Coupons le sphéroïde par un plan conduit par le centre et perpendiculaire sur l'axe, et que le cercle qui est produit par cette section soit la base d'un cône qui ait son sommet sur Δ. Le sphéroïde total sera double du segment qui a pour base le cercle décrit sur KA comme diamètre et qui a pour sommet le point Δ. Mais le segment dont nous venons de parler est double du cône qui a la même base et le même axe que le segment. Ce qui a été démontré (29). Donc le sphéroïde total est quadruple du cône dont nous venons de parler. Mais ce cône et celui qui a pour

base le cercle décrit autour de  $AR$  comme diamètre et pour sommet le point  $\Delta$  sont en raison composée de la raison de  $\Theta\Delta$  à  $EA$ , et de la raison du quarré de  $K\Theta$  au quarré de  $EA$ ; et la raison du quarré de  $K\Theta$  au quarré de  $EA$  est la même que celle de la surface comprise sous  $B\Theta$ ,  $\Theta\Delta$  à la surface comprise sous  $BE$ ,  $EA$ ; et de plus la raison de  $\Theta\Delta$  à  $EA$  est la même que la raison de  $\Xi\Delta$  à  $\Theta\Delta$ . Donc la surface comprise sous  $\Xi\Delta$ ,  $B\Theta$  est à la surface comprise sous  $B\Theta$ ,  $\Theta\Delta$  comme  $\Delta\Theta$  est à  $\Delta E$ . Mais la raison composée de la raison de la surface comprise sous  $\Xi\Delta$ ,  $\Theta B$  à la surface comprise sous  $B\Theta$ ,  $\Theta\Delta$ , et la raison de la surface comprise sous  $B\Theta$ ,  $\Theta\Delta$  à la surface comprise sous  $BE$ ,  $EA$  sont les mêmes que la raison de la surface comprise sous  $\Xi\Delta$ ,  $B\Theta$  à la surface comprise sous  $BE$ ,  $EA$ . Donc le cône qui a pour base le cercle décrit autour de  $K\Theta$  comme diamètre, et qui a pour sommet le point  $\Delta$  est au cône qui a pour base le cercle décrit autour de  $AR$  comme diamètre et pour sommet le point  $\Delta$ , comme la surface comprise sous  $\Xi\Delta$ ,  $B\Theta$  est à la surface comprise sous  $BE$ ,  $EA$ . Mais le cône qui a pour base le cercle décrit autour de  $AR$  comme diamètre

et pour sommet le point  $\Delta$  est au segment du sphéroïde qui a la même base et le même axe, comme la surface comprise sous  $BE$ ,  $E\Delta$  est à la surface comprise sous  $ZE$ ,  $E\Delta$ , c'est-à-



dire comme  $BE$  est à  $EZ$ ; car on a démontré qu'un segment plus petit que la moitié du sphéroïde est au cône qui a la même base et le même axe que ce segment, comme une droite composée de la moitié de l'axe du sphéroïde et de l'axe du grand segment est à l'axe du grand segment, c'est-à-dire comme  $ZE$  est à  $BE$  (32). Donc le cône qui est dans la moitié du sphéroïde est au segment qui est plus petit que la moitié du sphéroïde comme la surface comprise sous  $\Xi\Delta$ ,  $B\Xi$  est à la surface comprise sous  $ZE$ ,  $\Delta E$ . Mais le sphé-



roïde total est au cône qui est dans la moitié du sphéroïde comme la surface comprise sous  $ZH$ ,  $\Xi\Delta$  est à la surface comprise sous  $B\Theta$ ,  $\Xi\Delta$ ; car le sphéroïde total et la première surface sont quadruples du cône et de la seconde surface; et le cône qui est dans la moitié du sphéroïde est au segment qui est plus petit que la moitié du sphéroïde comme la surface comprise sous  $\Xi\Delta$ ,  $B\Theta$  est à la surface comprise sous  $ZE$ ,  $E\Delta$ ; et de plus, le sphéroïde total est au plus petit segment comme la surface comprise sous  $ZH$ ,  $\Xi\Delta$  est à la surface comprise sous  $ZE$ ,  $E\Delta$ ; donc le plus grand segment du sphéroïde est au plus petit comme l'excès de la surface comprise sous  $ZH$ ,  $\Xi\Delta$  sur la surface comprise sous  $ZE$ ,  $\Delta E$  est à la surface comprise sous  $ZE$ ,  $E\Delta$ . Mais l'excès de la surface comprise sous  $ZH$ ,  $\Xi\Delta$  sur la surface comprise sous  $ZE$ ,  $E\Delta$  est égal à la surface comprise sous  $\Xi\Delta$ ,  $EH$ , conjointement avec la surface comprise sous  $ZE$ ,  $\Xi E$ ; donc le plus grand segment du sphéroïde est au plus petit comme la surface comprise sous  $\Xi\Delta$ ,  $EH$ , conjointement avec la surface comprise sous  $ZE$ ,  $\Xi E$  est à la surface comprise sous  $ZE$ ,  $E\Delta$ . Mais le plus petit segment du

sphéroïde est au cône qui a la même base et le même axe que lui, comme la surface comprise sous  $ZE, E\Delta$  est à la surface comprise sous  $BE, E\Delta$ ; car la première raison est la même que celle de  $ZE$  à  $BE$ ; et le cône qui est dans le plus petit segment est au cône qui est dans le plus grand segment comme la surface comprise sous  $BE, E\Delta$  est au carré de  $BE$ ; car ces cônes qui ont la même base sont entre eux comme leurs hauteurs. Donc le plus grand segment du sphéroïde est au cône qui est dans ce segment comme la surface comprise sous  $\Xi\Delta, EH$ , conjointement avec la surface comprise sous  $ZE, \Xi E$  est au carré de  $BE$ . Mais cette raison est la même que celle de  $EH$  à  $E\Delta$ ; parce que la surface comprise sous  $\Xi\Delta, EH$  est à la surface comprise sous  $\Xi\Delta, E\Delta$  comme  $EH$  est à  $E\Delta$ ; et que la surface comprise sous  $ZE, \Xi E$  est à la surface comprise sous  $ZE, \Theta E$  comme la surface  $EH$  est à  $E\Delta$ ; car  $\Xi E$  est à  $\Theta E$  comme  $EH$  est à  $E\Delta$ , les droites  $\Xi\Delta, \Theta\Delta, \Delta E$  étant successivement proportionnelles, et  $\Theta\Delta$  étant égal à  $HA$ . Donc la surface comprise sous  $\Xi\Delta, EH$ , conjointement avec la surface comprise sous  $ZE, \Xi E$ , est à la surface comprise sous  $\Xi\Delta, E\Delta$ ,

conjointement avec la surface comprise sous  $ZE$ ,  $OE$  comme  $EH$  est à  $EA$ . Mais le quarré de  $BE$  est égal à la surface comprise sous  $EA$ ,  $EA$ , conjointement avec la surface comprise sous  $ZE$ ,  $OE$ ; parce que le quarré de  $BE$  est égal à la surface comprise sous  $EA$ ,  $EA$ , et que l'excès du quarré de  $BE$  sur le quarré de  $BE$  est égal à la surface comprise sous  $ZE$ ,  $OE$ , les droites  $BE$ ,  $BZ$  étant égales entre elles. Il est donc évident que le grand segment du sphéroïde est au cône qui a la même base et le même axe que ce segment, comme  $EH$  est à  $EA$ .

#### PROPOSITION XXXIV.

Si un sphéroïde est coupé par un plan qui ne passe pas par le centre, et qui ne soit pas perpendiculaire sur l'axe, le plus grand segment du sphéroïde sera au segment de cône qui a la même base et le même axe que lui, comme une droite composée de la moitié de la droite qui joint les sommets des segmens qui ont été produits par cette section, et de l'axe du petit segment est à l'axe du petit segment.

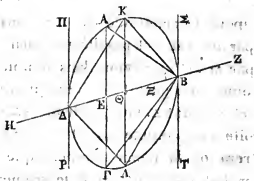
Coupons un sphéroïde par un plan, comme



à  $\Delta\Theta$ , et la droite  $BZ$  égale aussi à  $\Delta\Theta$ . Il faut démontrer que le plus grand segment est à un segment de cône qui a la même base et le même axe que ce segment, comme  $EH$  est à  $E\Delta$ .

Coupons le sphéroïde par un plan conduit par le centre et parallèle au plan conduit par  $AR$ ; et inscrivons dans la moitié du sphéroïde un segment de cône qui ait son sommet au point  $\Delta$ . Que la droite  $\Xi\Delta$  soit à la droite  $\Theta\Delta$ , comme  $\Delta\Theta$  est à  $E\Delta$ . On démontrera de la même manière que nous l'avons fait plus haut, que le segment de cône inscrit dans la moitié du sphéroïde est au segment de cône inscrit dans le plus petit segment, comme la surface comprise sous  $\Xi\Delta$ ,  $B\Theta$  est à la surface comprise sous  $BE$ ,  $E\Delta$ ; et que le segment de cône inscrit dans le plus petit segment est au segment dans lequel il est inscrit, comme la surface comprise sous  $BE$ ,  $E\Delta$  est à la surface comprise sous  $ZE$ ,  $E\Delta$ . Donc le segment de cône inscrit dans la moitié du sphéroïde est au plus petit segment de ce sphéroïde, comme la surface comprise sous  $\Xi\Delta$ ,  $B\Theta$  est à la surface comprise sous  $ZE$ ,  $E\Delta$ . Donc le sphéroïde total sera au seg-

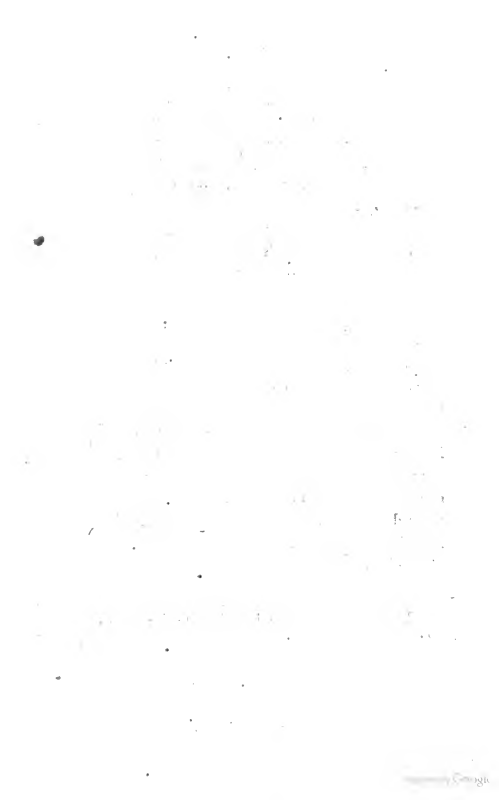
ment de cône inscrit dans la moitié du sphéroïde, comme la surface comprise sous  $ZH$ ,  $\Xi\Delta$  est à la surface comprise sous  $B\Theta$ ,  $\Xi\Delta$ ; car le sphéroïde total et la première surface



sont quadruples du cône et de la surface comprise sous  $B\Theta$ ,  $\Xi\Delta$ . Mais le segment de cône dont nous venons de parler est au plus petit segment du sphéroïde, comme la surface comprise sous  $\Xi\Delta$ ,  $B\Theta$  est à la surface comprise sous  $ZE$ ,  $\Xi\Delta$ ; donc le sphéroïde total est au plus petit segment du sphéroïde comme la surface comprise sous  $ZH$ ,  $\Xi\Delta$  est à la surface comprise sous  $EZ$ ,  $\Xi\Delta$ . Mais le plus grand segment du sphéroïde est au plus petit comme l'excès de la surface comprise sous  $ZH$ ,  $\Xi\Delta$  sur la surface comprise sous  $ZE$ ,  $\Xi\Delta$  est à la surface comprise sous  $ZE$ ,  $\Xi\Delta$ ; et le

plus petit segment du sphéroïde est au segment de cône qui lui est inscrit comme la surface comprise sous  $ZE$ ,  $E\Delta$  est à la surface comprise sous  $BE$ ,  $E\Delta$ ; car on a démontré que cette raison est la même que celle de  $ZE$  à  $BE$ ; et enfin le segment de cône inscrit dans le plus petit segment est au segment de cône inscrit dans le plus grand segment comme la surface comprise sous  $BE$ ,  $E\Delta$  est au carré de  $BE$ ; car les segments de cône dont nous venons de parler ayant la même base, sont entre eux comme leurs hauteurs, et ces hauteurs sont entre elles comme les droites  $\Delta E$ ,  $EB$ . Donc le plus grand segment du sphéroïde est au segment de cône qui lui est inscrit comme l'excès de la surface comprise sous  $HZ$ ,  $\Xi\Delta$  sur la surface comprise sous  $ZE$ ,  $E\Delta$  est au carré de  $BE$ . On démontrera de la même manière que nous l'avons fait plus haut, que cette raison est la même que celle de  $EH$  à  $E\Delta$ .

FIN DES CONOÏDES ET DES SPHÉROÏDES.





**COMMENTAIRE**  
**SUR LES ŒUVRES**  
**D'ARCHIMÈDE.**

THE

LIBRARY

---

# COMMENTAIRE

SUR LES DEUX LIVRES

DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE.

---

## LIVRE PREMIER.

ARCHIMÈDE A DOSITHÉE.

(α) LA section du cône rectangle est une parabole.

Un cône rectangle est un cône droit dont les côtés, c'est-à-dire les intersections de sa surface convexe et du plan conduit par l'axe, forment un angle droit. Si ces côtés forment un angle aigu, le cône s'appelle cône acutangle, et il s'appelle cône obtus-angle, si ces côtés forment un angle obtus.

Il suit évidemment de là que, si l'on coupe perpendiculairement un des côtés d'un cône rectangle par un plan, la section du cône rectangle sera une parabole; puisque le plan coupant sera parallèle à l'autre côté du cône. La section du cône acutangle, seroit une ellipse,

TOME I.

---

et la section du cône obtus-angle, une hyperbole. C'est ainsi que les anciens Géomètres, avant Apollonius, considéroient les sections du cône qui donnent la parabole, l'ellipse et l'hyperbole. Voyez la note (a) de la lettre d'Archimède à Dosithée, qui est à la tête du Traité des Conoïdes et des Sphéroïdes.

Dans Archimède, la parabole est toujours nommée section du cône rectangle; l'ellipse, section du cône acutangle, et l'hyperbole, section du cône obtus-angle. Pour éviter ces circonlocutions, et à l'exemple d'Apollonius, j'emploierai désormais les mots *parabole*, *ellipse* et *hyperbole*.

(c) Ce passage d'Archimède est très-obscur; j'ai suivi la leçon de M. Delambre. Voici la lettre qu'il me fit l'honneur de m'écrire au sujet de ce passage :

Paris, ce 14 décembre 1806.

« A peine étiez-vous sorti, Monsieur, qu'il m'est venu un doute sur le sens que nous donnons au passage obscur de la lettre à Dosithée. Voici comme on pourroit l'entendre : « Ces » propositions étoient renfermées dans la nature de ces figures, quoiqu'aucun géomètre » avant nous ne les eût apperçues; mais pour

» se convaincre de leur vérité, il suffira de com-  
» parer mes théorèmes aux démonstrations que  
» j'ai données sur ces figures. La même chose  
» est arrivée à Eudoxe. Ses théorèmes sur la  
» pyramide et le cône étoient aussi dans la na-  
» ture, et n'avoient été reconnus par aucun  
» géomètre avant lui. Je laisse le jugement sur  
» mes découvertes à ceux qui seront en état de  
» les examiner. Plût à Dieu que Conon vécût  
» encore, il auroit été bien en état d'en dire son  
» avis ».

» Ainsi il ne s'agit pas dans la comparaison  
des figures aux théorèmes, de juger si ces théo-  
rèmes sont nouveaux, mais s'ils sont vrais. De  
ce qu'ils n'ont été vus par personne, il ne s'en-  
suit pas qu'on doive les regarder comme dou-  
teux; la même chose est arrivée à Eudoxe, qui  
a trouvé sur la pyramide et le cône des théo-  
rèmes nouveaux et qui pourtant ont été ad-  
mis; que les géomètres examinent donc mes  
propositions et les jugent. Voilà je pense le  
vrai sens de la lettre. Les mots *ut quivès facile  
intelliget* ne sont pas exactement dans le grec;  
*ut* y manque, et cet *ut* change le sens. Au  
lieu de *ut* le grec porte *et*. *Ces propositions sont  
dans la nature, et pour les comprendre il suffit  
de comparer les théorèmes aux figures et aux  
démonstrations.* J'avoue pourtant que l'expres-  
sion grecque me paroît trop peu développée,

καὶ νοήσειεν ὅς, *et comprendra celui qui*. Remarquons que ce mot νοήσειεν, *comprendra, se mettra dans la tête*, ne seroit pas le mot propre s'il s'agissoit de reconnoître seulement la nouveauté du théorème. Pour décider si un théorème est nouveau, l'*intelligence* ne fait rien ; il suffit d'avoir des yeux et de savoir lire ; mais pour s'assurer de la vérité d'un théorème, il faut être en état de suivre une démonstration, et souvent celles d'Archimède ont besoin qu'on ait quelque intelligence et quelque force de tête.

» Je serois tenté de croire le passage altéré, et qu'il a dû être originairement à-peu-près ainsi : Καὶ νοήσειεν ὅς ἂν τούτων τῶν θεωρημάτων ταῖς ἀποδείξεσι ἀντιπαραβάλλῃ αὐτὰ τὰ σχήματα. Je mets θεωρημένων, au lieu de σχημάτων, et σχήματα au lieu de θεωρημένα. C'est une simple transposition, alors le sens est clair, et alors Archimède dira : *Pour comprendre mes propositions, en sentir l'exactitude, il suffit de comparer la figure à la démonstration des théorèmes*, c'est-à-dire de suivre sur la figure la démonstration des théorèmes. Cependant on peut soutenir la leçon de Torelli, en entendant littéralement le mot *démonstration*. Aujourd'hui par ce mot nous entendons une preuve claire et irrésistible ; mais dans le fait il ne signifie que l'action d'exposer, de *montrer*. Pour

*sentir la vérité de ces propositions , il suffit de les comparer à ce que montrent ces figures ; ou l'inspection seule de la figure mettra dans tout son jour la vérité des théorèmes.*

» Au reste , ce passage est tellement tronqué dans un manuscrit n° 2360, qu'il est impossible d'en rien tirer ; heureusement il est en lui-même très-peu important. *Voyez* les variantes édit. de Torelli.

» J'ai l'honneur d'être , etc. »

## AXIOMES.

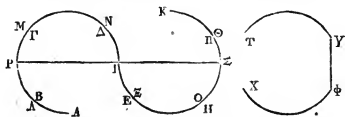
(a) Archimède appelle lignes courbes, non-seulement les lignes qui ne sont ni droites, ni composées de lignes droites, mais encore les lignes brisées et les lignes mixtilignes.

D'après le premier axiôme, un arc de cercle est une courbe, qui est toute entière du même côté de la droite, qui joint ses extrémités. Si une courbe étoit composée d'une demi-circconférence de cercle et d'un rayon qui joindroit une de ses extrémités, cette courbe n'auroit aucune de ses parties de l'autre côté de la droite qui joindroit ses extrémités, quand même cette droite seroit prolongée : alors seulement une partie de la courbe seroit sur le prolongement de la droite qui joindroit ses extrémités. Ce

qui n'arriveroit point, si l'arc étoit plus grand que la demi-circonférence.

(6) Cet axiôme, qui a beaucoup embarrassé les commentateurs, est cependant de la plus grande clarté. Il suffit pour le comprendre de faire attention qu'une ligne courbe, quelle qu'elle soit, a deux côtés aussi bien qu'une ligne droite.

Soit la courbe  $API\Sigma K$ . Les lettres  $B\Gamma\Delta E H\Theta$



sont placées d'un des côtés de cette courbe, et les lettres  $\Lambda MN\Xi O\Pi$  sont placées de l'autre côté. Si l'on s'imaginait que le point  $A$  se mût dans la courbe  $API\Sigma K$  jusqu'à ce qu'il fût arrivé au point  $K$ ; on pourroit dire que les lettres  $B\Gamma\Delta E H\Theta$  sont à la droite de la courbe, et que les lettres  $\Lambda MN O\Pi$  sont à sa gauche.

Cela posé, joignons les deux points  $P\Sigma$  de cette courbe par la droite  $PZ$ . Il est évident que la droite  $P\Sigma$  sera de différens côtés de cette courbe; la portion  $PI$  sera d'un côté; et la portion  $I\Sigma$  sera de l'autre; ou si l'on veut, la pre-



mière portion sera à la droite de la courbe, et la seconde à sa gauche. Donc cette courbe n'est pas concave du même côté, puisque la droite  $P\Sigma$ , qui joint deux de ses points, est de différens côtés de cette courbe.

Une circonférence de cercle, une portion de sa circonférence, une ellipse, une portion de l'ellipse, une parabole et une hyperbole, sont au contraire des courbes concaves du même côté, parce que les droites qui joindroient deux points quelconques de ces courbes, seroient nécessairement des mêmes côtés de ces courbes.

Soit la ligne courbe  $Tr\Phi X$ , qui est composée de deux arcs  $Tr$ ,  $X\Phi$  appartenant à un même cercle, et d'une droite  $r\Phi$  menée du point  $r$  au point  $\Phi$ ; cette courbe sera encore concave du même côté, parce que les droites qui joignent deux points quelconques de cette courbe tombent toutes du même côté, excepté la droite menée du point  $r$  au point  $\Phi$ , qui tombe sur cette ligne courbe.

Il sera facile d'appliquer au quatrième axiôme ce que je viens de dire du second.

## PRINCIPES.

( $\alpha$ ) Ce principe n'est point, comme beaucoup de Géomètres l'ont cru, une définition de la ligne droite : c'est simplement l'énoncé d'une de ses propriétés.

(6) Il est des personnes qui pensent que l'injure des temps a fait périr une partie des Elémens d'Euclide, qui regardent le cylindre, le cône et la sphère : ces personnes sont dans l'erreur. Tous les théorèmes qu'on regrette de ne pas trouver dans Euclide, ne peuvent être démontrés qu'à l'aide des principes 2 et 4 : or, Euclide n'a jamais fait usage de ces deux principes ; on ne doit donc pas être surpris de ne pas trouver dans ses Elémens les théorèmes, dont nous venons de parler, et qu'Archimède démontre dans ce traité.

Plusieurs Géomètres ont tenté, mais en vain, de démontrer ces deux principes, lorsque les lignes courbes et les surfaces courbes ne sont point des assemblages de lignes droites et de surfaces planes. Si ces deux principes pouvoient être démontrés, ils l'auroient été par Archimède. Je dis dans la Préface la raison pourquoi il est impossible de démontrer ces deux principes.

(7) Ce principe est une conséquence de la première proposition du dixième livre d'Euclide.

## PROPOSITION III.

(a) Mais  $\Gamma A$  est à  $A\Theta$  comme  $HE$  est à  $ZH$ ; donc la raison de  $EH$  à  $ZH$  est moindre que la raison de  $\Gamma A$  à  $\Gamma B$ .

## PROPOSITION IV.

(a) Si l'angle  $THR$  étoit égal à l'angle  $\Delta KM$ , il est évident que la raison de  $MK$  à  $\Delta K$  seroit la même que la raison de  $\Gamma H$  à  $HT$ . Si nous supposons ensuite que l'angle  $THR$  diminue, la droite  $\Gamma H$  diminuera aussi, et la raison de  $\Gamma H$  à  $HT$  deviendra plus petite; donc alors la raison de  $MK$  à  $\Delta K$  sera plus grande que la raison de  $\Gamma H$  à  $HT$ .

(c) Donc la raison du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit est moindre que la raison de  $A$  à  $B$ .

## PROPOSITION VI.

(a) Cette proposition est démontrée dans les Elémens d'Euclide. Voyez la proposition II, livre XII.

## PROPOSITION VII.

(a) Appelons  $P$  le polygone circonscrit, et  $p$  le polygone inscrit. Puisque  $P : p < A + B : A$ , et que  $P < A$ , on aura à plus forte raison  $P : A < A + B : A$ . Donc par soustraction  $P - A : A < B : A$ . Donc  $P - A$ , c'est-à-dire la somme des segmens placés autour du cercle est plus petite que la surface  $B$ .

## PROPOSITION VIII.

(a) Lorsqu'Archimède parle d'une surface comprise sous deux droites, il entend toujours parler d'un rectangle, dont une de ces droites est la base et dont l'autre est la hauteur.

## • PROPOSITION XIV.

(a) La raison en est simple; car puisque  $\Gamma\Delta : H :: H : EZ$ , il est évident qu'on aura  $\frac{\Gamma\Delta}{2} : H :: H : 2 \times EZ$ , ou bien  $\Gamma\Delta : H :: H : PZ$ .

(c) La raison de la surface du prisme à la surface du cylindre est moindre que la raison du polygone inscrit dans le cercle  $B$  au cercle  $B$ . Voilà ce qui est sousentendu, et ce qu'Archi-

mède sousentend toujours dans la suite , lorsqu'il a un raisonnement semblable à faire. Pour que le lecteur puisse , dans ce cas , suppléer ce qui manque , il faut qu'il se souvienne que , lorsqu'on a quatre quantités , et que la raison de la première à la seconde est moindre que la raison de la troisième à la quatrième , la raison de la première à la troisième est encore moindre que la raison de la seconde à la quatrième.

(γ) Parce que ces triangles sont entre eux comme les droites  $T\Delta$  ,  $PZ$  , et que nous avons vu dans la première partie de la démonstration que  $T\Delta$  est à  $PZ$  comme  $\overline{T\Delta}^2$  est à  $\overline{H}^2$ .

(δ) La raison du polygone qui est circonscrit au cercle  $B$  à ce même cercle , est moindre que la raison du polygone inscrit dans le cercle  $B$  à la surface du cylindre.

## PROPOSITION XV.

(α) Donc , par permutation , la raison de la surface de la pyramide qui est circonscrite au cône à la surface du cône est moindre que la raison du polygone inscrit dans le cercle  $B$  au cercle  $B$ .

(6) En effet, la raison du rayon du cercle A au côté du cône est la même que la raison de la perpendiculaire menée du centre du cercle A sur le côté du polygone à la parallèle au côté du cône menée du milieu du côté du polygone et terminée à l'axe du cône. Mais la perpendiculaire menée du sommet du cône sur le côté du polygone est plus longue que la parallèle dont nous venons de parler ; donc la raison du rayon du cercle A au côté du polygone est plus grande que la raison de la perpendiculaire menée du centre sur le côté du polygone à la perpendiculaire menée du sommet du cône sur le côté de ce même polygone.

(7) Donc, par permutation, la raison du polygone circonscrit au cercle B est moindre que la raison de la surface de la pyramide inscrite à la surface du cône.

## PROPOSITION XVI.

(a) Donc le cercle  $\Delta$  est au cercle A comme le carré de E est au carré de B, Mais à cause que E est moyen proportionnel entre  $\Gamma$  et B, la droite  $\Gamma$  est à la droite B comme le carré de E est au carré de B ; donc le cercle  $\Delta$  est au cercle A comme  $\Gamma$  est à B ; mais le cercle  $\Delta$  est égal à la surface du cône.

## LEMME.

(a) Le parallélogramme BH pourroit n'être pas un rectangle, mais alors par les surfaces comprises sous BA, AH; sous BΔ, ΔZ, etc. il faudroit entendre des rectangles dont les droites AH, ΔZ seroient les bases et les droites BA, BΔ les hauteurs.

## LEMME S.

(a) Les cylindres qui ont la même base sont entre eux comme leurs hauteurs; donc les cônes qui ont la même base sont aussi entre eux comme leurs hauteurs: ce qui est l'inverse du premier lemme. Je pense qu'il y a une omission, et que le lemme doit être posé ainsi: Lorsque des cônes et des cylindres ont les mêmes bases et les mêmes hauteurs, les cônes sont entre eux comme les cylindres.

(c) Voyez le douzième livre d'Euclide.

## PROPOSITION XIX.

(a) Car puisque les cônes BAF, BΔF ont la même base, la droite AE est à la droite ΔE comme le cône BAF est au cône BΔF (17,

*lemm. 1*). Donc, par addition, la droite  $\Lambda\Delta$  est à la droite  $\Delta E$  comme le rhombe  $AB\Gamma\Delta$  est au cône  $B\Delta\Gamma$ .

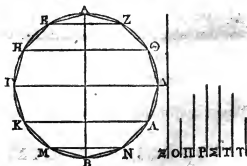
## PROPOSITION XXIV.

( $\alpha$ ) Archimède veut que le nombre des côtés soit divisible par quatre, afin que deux diamètres perpendiculaires l'un sur l'autre aient leurs extrémités aux angles du polygone inscrit.

( $\epsilon$ ) Perpendiculaires l'un sur l'autre.

## PROPOSITION XXV.

( $\alpha$ ) En effet, puisque les cercles sont proportionnels aux quarrés de leurs rayons, le quarré



du rayon du cercle  $\alpha$  est au cercle  $\alpha$ , comme le quarré du rayon du cercle  $O$  est au cercle  $O$ , comme le quarré du rayon du cercle  $\Pi$  est au



cercle  $\Pi$ , comme le quarré du rayon du cercle  $P$  est au cercle  $P$ , comme le quarré du rayon du cercle  $\Sigma$  est au cercle  $\Sigma$ , comme le quarré du rayon du cercle  $T$  est au cercle  $T$ , comme le quarré du rayon du cercle  $\tau$  est au cercle  $\tau$ . Donc le quarré du rayon du cercle  $\Xi$  est au cercle  $\Xi$  comme la somme des quarrés des rayons des cercles  $O, \Pi, P, \Sigma, T, \tau$  est à la somme des cercles  $O, \Pi, P, \Sigma, T, \tau$ . Mais le quarré du rayon du cercle  $\Xi$  est égal à la somme des quarrés des rayons des cercles  $O, \Pi, P, \Sigma, T, \tau$ ; donc le cercle  $\Xi$  est égal à la somme des cercles  $O, \Pi, P, \Sigma, T, \tau$ .

## PROPOSITION XXXI.

(a) Car les deux triangles  $K\Theta Z, \Sigma XZ$  étant semblables, la droite  $\Theta Z$  est à  $XZ$  comme  $\Theta K$  est à  $X\Sigma$ . Mais  $\Theta Z$  est double de  $XZ$ ; donc  $\Theta K$  est double du rayon  $X\Sigma$ ; donc  $\Theta K$  est égal au diamètre du cercle  $AB\Gamma\Delta$ .

## PROPOSITION XXXIV.

(a) Car puisque les droites qui joignent les angles du polygone circonscrit, et les droites qui joignent les angles du polygone inscrit sont entre elles comme les côtés des polygones, la somme des premières droites est à la somme

des secondes droites comme EA est à AK: Donc les surfaces comprises sous les sommes des droites qui joignent les angles des polygones et les côtés des polygones sont des figures semblables.

### PROPOSITION XXXV.

(a) Donc, par permutation, la raison de la surface de la figure circonscrite à la surface de la sphère est moindre que la raison de la surface de la figure inscrite au cercle A.

### PROPOSITION XXXVI.

(a) Soient  $a$ ,  $a - d$ ,  $a - 2d$ ,  $a - 3d$ , quatre termes d'une progression arithmétique décroissante, et que ces quatre termes soient ou tous positifs ou tous négatifs. Je dis que la raison du premier terme au quatrième est plus grande que la raison triplée du premier au second; c'est-à-dire, que

$$\frac{a}{a - 3d} > \frac{a^3}{(a - d)^3}.$$

J'élève  $a - d$  au cube; je fais disparaître les dénominateurs. La réduction étant faite, la première quantité devient  $3ad^2$ , et la seconde

$d^3$ . Mais  $3ad^2$  est plus grand que  $d^3$ , puisque  $a$  est plus grand que  $d$ ; donc

$$\frac{a}{a-3d} > \frac{a^3}{(a-d)^3}.$$

Donc la raison du premier terme d'une progression arithmétique décroissante au quatrième terme est plus grande que la raison triplée du premier terme au second.

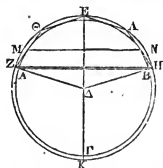
( $\epsilon$ ) Mais la raison de K à H est moindre que la raison de la sphère au cône  $\varepsilon$ ; donc la raison de la figure circonscrite à la figure inscrite est encore moindre que la raison de la sphère au cône. Donc, par permutation, la raison de la figure circonscrite à la sphère est encore moindre que la raison de la figure inscrite au cône.

( $\gamma$ ) Donc la raison de la figure circonscrite à la figure inscrite est encore moindre que la raison du cône  $\varepsilon$  à la sphère. Donc, par permutation, la raison de la figure circonscrite au cône  $\varepsilon$  est moindre que la raison de la figure inscrite à la sphère.

## PROPOSITION XLII.

( $\alpha$ ) En effet, la surface engendrée par la droite MZ est égale à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre la droite ZM et la

moitié de la somme des droites ZH, MN (17), et la surface décrite par la droite MA est égale à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre la droite MA et la moitié de la somme des



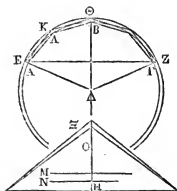
droites  $\Delta B$ ,  $MN$ . Mais  $ZM$  est plus grand que  $MA$ , et  $ZH$  plus grand que  $AB$ ; donc la première moyenne proportionnelle est plus grande que la seconde. Donc la surface décrite par  $ZM$  est plus grande que la surface décrite par  $MA$ .

**PROPOSITION XLIV.**

(a) Ce qui précède, à partir de ces mots *mais la surface*, etc. est un peu obscur, voici ce qu'on pourroit mettre à sa place. Donc le carré du rayon du cercle N, qui est égal à la surface comprise sous  $M\Theta$ , HZ est encore égal à la surface comprise sous  $\Gamma\Delta$ , HZ. Mais le carré de la droite  $\Delta A$  est égal à la surface comprise sous  $\Gamma\Delta$ ,  $\Delta Z$ , et nous venons de démontrer



polygone circonscrit est à la somme des droites qui joignent les angles du polygone inscrit, comme EK est à AA. Donc la surface comprise sous EK et sous la somme des droites qui joignent les angles du polygone circonscrit, conjointement avec la moitié de EZ, est semblable



à la surface comprise sous AA et sous la somme des droites qui joignent les angles du polygone inscrit, conjointement avec la moitié de AF. Donc la première figure est à la seconde comme le carré de EK est au carré de AA. Mais le carré du rayon du cercle M est égal à la première figure, et le carré du rayon du cercle N est égal à la seconde; donc le premier carré est au second comme le carré de EK est au carré de AA. Donc le cercle M, c'est-à-dire la surface de la figure circonscrite est au cercle N, c'est-à-dire à la surface de la

figure inscrite comme le quarré de  $EK$  est au quarré de  $AA$ .

(c) Puisque dans la première partie de cette démonstration, l'on a vu que le quarré de  $EK$  est au quarré de  $AA$  comme le cercle  $M$  est au cercle  $N$ , il est évident que  $EK$  est à  $AA$  comme le rayon du cercle  $M$  est au rayon du cercle  $N$ .

### PROPOSITION XLVIII.

(a) Donc la raison de la surface de la figure circonscrite à la surface de la figure inscrite est moindre que la raison de la surface du segment au cercle  $Z$ . Donc, par permutation, la raison de la surface de la figure circonscrite à la surface du segment est moindre que la raison de la surface de la figure inscrite au cercle  $Z$ .

(c) Puisque le polygone circonscrit est au polygone inscrit comme la surface de la figure circonscrite est à la surface de la figure inscrite, la raison de la surface de la figure circonscrite à la surface de la figure inscrite est moindre que la raison du cercle  $Z$  à la surface du segment. Donc, par permutation, la surface de la figure circonscrite au cercle  $Z$  est moindre que la raison de la surface de la figure inscrite à la sur-

### 388 DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE.

face du segment. Mais la surface de la figure circonscrite est plus grande que le cercle  $z$  (44); donc la surface de la figure inscrite est plus grande que la surface du segment; ce qui ne peut être.

### PROPOSITION L.

(a) *Voyez* la note (a) de la prop. xxxvi.

(c) Donc la raison de la figure solide circonscrite au secteur est moindre que la raison de la figure inscrite au cône  $\Theta$ .



## LIVRE SECOND.

## PROPOSITION II.

(a) Alors au lieu de  $\overline{\Gamma\Delta}^1 : \overline{H\Theta}^2 :: H\Theta : EZ$ , on aura  $\overline{\Gamma\Delta}^1 : \Gamma\Delta \times MN :: H\Theta : EZ$ ; ou bien  $\Gamma\Delta : MN :: H\Theta : EZ$ , et par permutation  $\Gamma\Delta : H\Theta :: MN : EZ$ . Mais  $\overline{H\Theta}^1 = \Gamma\Delta \times MN$ ; donc  $\Gamma\Delta : H\Theta :: H\Theta : MN$ . Mais  $\Gamma\Delta : H\Theta :: MN : EZ$ ; donc  $\Gamma\Delta : H\Theta :: H\Theta : MN :: MN : EZ$ . Cette note se rapporte à la fin de la phrase précédente.

(c) Car le cylindre  $\Gamma Z\Delta$  étant construit, il est évident que le diamètre de sa base et son axe sont nécessairement donnés.

(d) Archimède n'en donne pas le moyen. Eutocius expose très au long les différentes manières de résoudre le problème des deux moyennes proportionnelles. J'aurois fait avec plaisir un extrait de son commentaire, si je n'avois pas craint de trop grossir le volume. Je me contenterai de dire que ce problème a été résolu par Platon, Archytas, Héron, Philon de Byzance, Apollonius, Dioclès, Pappus,

Sporus, Menechime, Eratosthène et Nicomède. On sait qu'avec la ligne droite et le cercle seulement le problème n'a point de solution, c'est-à-dire qu'on ne sauroit résoudre ce problème avec la géométrie ordinaire.

(d) Puisque  $\Gamma\Delta : H\Theta :: MN : EZ$ ; par permutation et à cause que  $H\Theta = K\Lambda$ , on aura  $\Gamma\Delta : MN :: K\Lambda : EZ$ . Mais  $\Gamma\Delta : MN :: \overline{\Gamma\Delta}^2 : \overline{H\Theta}^2$ ; donc  $\overline{\Gamma\Delta}^2 : \overline{H\Theta}^2 :: K\Lambda : EZ$ . Donc cer.  $\Gamma\Delta : \text{cer. } H\Theta :: K\Lambda : EZ$ . Donc les bases E, K des cylindres sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs.

### PROPOSITION III.

(a) Il est entendu que la base de ce cône doit être égale au cercle qui a pour rayon la droite BR.

(c) La démonstration du premier livre ne regarde qu'un secteur sphérique dont la surface est plus petite que la moitié de la surface de la sphère; mais il est facile d'en conclure que l'autre secteur BΘZA est aussi égal à un cône qui a pour base le cercle décrit autour de BR comme diamètre, et pour hauteur le rayon de la sphère.

(γ) Par permutation et addition,

(*d*) Dans toute proportion géométrique, le carré de la somme des deux premiers termes est à leur produit comme le carré de la somme des deux derniers est à leur produit. Soit la proportion géométrique  $a : aq :: b : bq$ ; je dis qu'on aura :

$$(a + aq)^2 : a^2 q :: (b + bq)^2 : b^2 q.$$

En effet, ces quatre quantités peuvent être mises sous la forme suivante :

$$(1 + q)^2 a^2, a^2 q, (1 + q)^2 b^2, b^2 q.$$

Divisant les deux premiers termes par  $a^2$ , et les deux derniers par  $b^2$ , on aura les deux raisons égales :

$$(1 + q)^2 : q, \text{ et } (1 + q)^2 : q.$$

(*e*) On pourroit démontrer de la manière suivante que  $\Delta E : E\Gamma :: \Theta A + AE : AE$ , lorsque le segment solide  $AB\Gamma$  est égal au cône  $A\Delta\Theta$ , ou ce qui est la même chose, lorsque le secteur solide  $BRZ\Theta$  est égal au rhombe solide  $B\Delta Z\Theta$ .

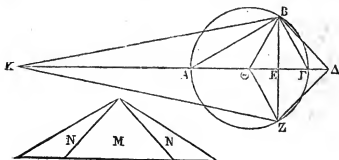
Supposons donc que le secteur solide  $BRZ\Theta$ , ou le cône  $M$  soit égal au rhombe solide  $B\Delta Z\Theta$ .

Nous aurons,  $\Theta\Delta : \Theta\Gamma :: \text{cer. } B\Gamma : \text{cer. } BE :: \overline{B\Gamma} : \overline{BE} :: \overline{A\Gamma} : \overline{AB} :: A\Gamma : AE$ . Donc  $\Theta\Delta : \Theta\Gamma :: A\Gamma : AE$ . D'où l'on déduit, par soustraction,  $\Gamma\Delta : \Theta\Gamma :: E\Gamma : AE$ ; par permutation,  $\Gamma\Delta : E\Gamma :: \Theta\Gamma : AE$ ;

392 DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE.

et enfin par addition,  $\Delta E : E\Gamma :: A\Theta + AE : AE$ .  
Ce qu'il falloit démontrer.

Je démontrerois ensuite que  $KE : EA :: \Theta\Gamma + \Gamma E : \Gamma E$ , lorsque le segment solide BAZ est égal au cône BKZ, ou lorsque le secteur solide



$B\Theta ZA$  est égal à la figure solide  $B\Theta ZK$ , en conduisant de la même manière.

Supposons en effet que le secteur solide  $B\Theta ZA$ , ou que le cône N soit égal à la figure solide  $B\Theta ZK$ ; nous aurons,  $K\Theta : A\Theta :: \text{cer. } BA : \text{cer. } BE :: \overline{BA}^2 : \overline{BE}^2 :: \overline{A\Gamma}^2 : \overline{B\Gamma}^2 :: A\Gamma : B\Gamma :: A\Gamma : E\Gamma$ . Donc  $K\Theta : A\Theta :: A\Gamma : E\Gamma$ . D'où l'on déduit par soustraction,  $KA : A\Theta :: AE : E\Gamma$ ; par permutation,  $KA : AE :: A\Theta : E\Gamma$ ; et enfin par addition,  $KE : AE :: \Theta\Gamma + E\Gamma : E\Gamma$ . Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION V.

(a) Par permutation et par addition.

(c) Parce que dans la proportion continue, le premier terme est au troisième comme le carré du premier est au carré du second.

(γ) En effet, puisque  $X\Delta : XB :: KB : BP$ , et que  $\Delta X$  est plus grand que  $BX$ , la droite  $KB$  sera plus grande que la droite  $BP$ .

(δ) Parce que la somme des deux premiers termes d'une proportion est au premier comme la somme des deux derniers est au troisième.

(ε) Si l'on a trois quantités  $a, b, c$ , la raison de la première à la seconde est la même que la raison composée de la raison de la première à la troisième, et de la raison de la troisième à la seconde; c'est-à-dire, que la raison de  $a : b$  est composée de la raison de la raison  $a$  à  $b$ , et de la raison de  $c : b$ ; c'est à-dire, que la raison  $a$  à  $b$  est égale à la raison de  $ac$  à  $bc$ .

(η) Cette solution et cette construction ne se trouvent point dans Archimède. Voyez sur ce problème la note suivante. Cette note, qui m'a

paru très-intéressante, m'a été communiquée par M. Poincot.

(θ) Il est bien aisé de voir que la construction d'Archimède résoudroit le problème ; car il faut que le plus grand segment soit au plus petit comme  $\Pi$  à  $\Sigma$ , ou le plus grand segment à la sphère comme  $\Pi$  à  $\Pi + \Sigma$  ; or, en nommant  $r$  le rayon, et  $x$  l'apothème  $KX$ , la première proportion d'Archimède,

$$\Theta Z : \Theta B :: \Pi : \Sigma, \text{ donne } \Theta Z : r :: \Pi : \Pi + \Sigma.$$

La deuxième, (A)

$$xz : \Theta Z :: \overline{B\Delta} : \overline{\Delta X}, \text{ devient } 2r - x : \Theta Z :: 4r^2 : (r + x)^2.$$

D'où, en multipliant par ordre, on tire :

$$2r - x : r :: 4r^2 \Pi : (r + x)^2 (\Pi + \Sigma), \quad (B);$$

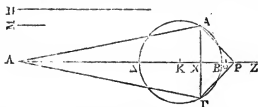
ou bien, en faisant passer le facteur  $(r + x)^2$  à l'autre extrême, et le facteur  $4r^2$  à l'autre moyen, ce qui est permis :

$$(2r - x)(r + x)^2 : 4r^3 :: \Pi : \Pi + \Sigma.$$

Mais le premier terme  $(2r - x)(r + x)^2$  étant multiplié par le tiers du rapport  $\pi$  de la circonférence au diamètre, donne le volume du segment dont  $x$  est l'apothème et  $r + x$  la flèche ; et le deuxième  $4r^3$  étant multiplié par le même nombre donne la sphère. Donc, etc.

Réciproquement, si l'on vouloir poser im-

médiatement la proportion du problème, il faudroit faire : le segment , ou  $\frac{\pi}{5} (2r-x)(r+x)^2$ , à la sphère, ou  $\frac{\pi}{5} 4r^3$ , comme  $\Pi$  à  $\Pi + \Sigma$ . D'où l'on déduiroit la proportion (B), qu'on pourroit regarder comme le résultat des deux pro-



portions (A) qu'Archimède a su découvrir par son génie.

Archimède en promet pour la fin la solution; mais cette solution ne se trouve pas; et s'il entend une solution ordinaire, c'est-à-dire, par la règle et le compas, comment l'a-t-il pu trouver? La proportion donne pour  $x$  l'équation du troisième degré :

$$x^3 - 3r^2x + r^3 \cdot 2r \left( \frac{\Pi - \Sigma}{\Pi + \Sigma} \right) = 0,$$

laquelle, comparée à la formule générale  $x^3 + px + q = 0$ , donne  $p$  essentiellement négatif, et  $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$ , et par conséquent tombe dans le cas irréductible, et a ses trois racines essen-

tiellement réelles. Cette équation répond à la trisection d'un arc  $\varphi$  dont la corde  $c$  seroit égale à  $2r \left( \frac{\pi - \Sigma}{\pi + \Sigma} \right)$  dans le cercle dont le rayon est  $r$ . Car en nommant  $x$  la corde du tiers de cet arc, on a par la géométrie,  $x^3 - 3r^2x + r^2c = 0$ ; de sorte que l'une des racines de l'équation est la corde de l'arc  $\frac{\varphi}{3}$ ; et les deux autres

sont les cordes respectives des arcs  $\frac{u+\varphi}{3}$ ,  $\frac{2u+\varphi}{3}$  (en nommant  $u$  la circonférence entière). Car on sait que la même corde  $c$  répond, non-seulement à l'arc  $\varphi$ , mais encore aux arcs  $u + \varphi$ ,  $2u + \varphi$ ; et encore à une infinité d'autres  $3u + \varphi$ , etc.  $u - \varphi$ ,  $2u - \varphi$ , etc., mais dont les tiers redonneroient les mêmes cordes que les trois premiers.

Ainsi Archimède auroit, par sa construction, exprimé des radicaux cubes par des radicaux quarrés, et résolu le problème de la trisection de l'angle, ce qui est impossible. Il faut donc penser que s'il a donné la construction qu'il annonce, elle n'étoit pas *géométrique*, c'est-à-dire qu'elle se faisoit par le moyen du cercle et de quelqu'autre section conique, telle que la parabole. Mais d'un autre côté, comme il n'emploie jamais dans ses constructions que la règle et le compas, il est plus probable qu'il



n'avoit pas encore de solution ; et que ne la jugeant pas d'abord supérieure au cercle , il ne l'annonce pour la fin , que dans l'espérance où il est de la trouver lorsqu'il viendra à s'en occuper d'une manière particulière. Et cela devient plus probable encore, si l'on observe que l'inconnue de sa proportion ayant nécessairement trois valeurs réelles différentes , il est impossible que sa construction , quelle qu'elle fût , les ait distinguées pour lui en donner une de préférence aux autres. Or, dans ce cas , il n'auroit pu s'empêcher d'en faire la remarque, et de dire un mot sur ce singulier paradoxe, d'avoir trois valeurs différentes, pour résoudre un problème qui n'a évidemment qu'une seule solution ; car il est évident qu'il n'y a qu'une manière de couper la sphère en deux segmens qui soient dans une raison donnée. Il est donc peu probable que la construction d'Archimède soit perdue , puisqu'il est très-probable qu'elle n'a point existé.

Au reste , si l'on veut voir ce que signifient les trois valeurs qu'on trouve pour l'apothème inconnue  $x$  , on considérera que la corde  $c$  de l'arc  $\phi$  étant  $2r \left( \frac{\pi - \Sigma}{\pi + \Sigma} \right)$ , et par conséquent plus petite que le diamètre  $2r$  ;  $\frac{\phi}{3}$  est nécessairement moindre qu'un sixième de la circonfé-

rence  $u$ . Par conséquent la première racine

$x = \text{cord. } \frac{\phi}{3}$  est nécessairement plus petite que

le rayon, et les deux autres  $x' = \text{cord.}$

$\frac{u + \phi}{3}$ ,  $x'' = \text{cord. } \frac{2u + \phi}{3}$ , sont nécessaire-

ment plus grandes. De ces trois valeurs, il

n'y a donc que la première qui puisse résoudre

le problème que l'on a en vue, puisque l'apo-

thème du segment est toujours plus petite que

le rayon de la sphère. Les deux autres racines

résolvent donc quelque autre problème analogue

intimement lié à celui-là. Elles indiquent deux

sections à faire dans le solide décrit par la ré-

volution de l'hyperbole équilatère de même

axe que le cercle générateur de la sphère; et

ces sections faites aux distances  $x'$  et  $x''$  du cen-

tre, déterminent en effet deux segmens hyper-

boliques respectivement égaux à ceux de la

sphère proposée. Car si l'on nomme  $x$  la per-

pendiculaire abaissée du centre sur la base du

segment hyperbolique, de sorte que  $x - r$  en

soit la flèche, on trouve, pour le volume de

ce segment,

$$\frac{\pi}{3} (2r^3 - 3r^2x + x^3);$$

ce qui est aussi l'expression du segment sphé-

rique dont la flèche est  $r - x$ . Ainsi la liaison

intime de l'hyperbole équilatère au cercle, fait qu'on ne peut résoudre le problème proposé dans la sphère, sans le résoudre en même temps dans l'hyperboloïde de révolution.

La suite des signes dans l'équation ,

$$x^3 - 3r^2x + r^2 \cdot 2r \left( \frac{\Pi - \Sigma}{\Pi + \Sigma} \right) = 0,$$

fait voir que des trois racines  $x$ ,  $x'$ ,  $x''$ , deux sont nécessairement positives et la troisième négative ; et l'absence du second terme montre que celle-ci est égale à la somme des deux autres. On prendra donc les deux plus petites cordes, qui sont  $x$  et  $x''$ , en plus ; et l'autre  $x'$  en moins. La première portée à droite à partir du centre sur le diamètre répondra aux deux segmens sphériques qui sont entre eux comme  $\Pi$  à  $\Sigma$  ; la deuxième portée du même côté sur la même ligne répondra au segment hyperbolique égal au segment sphérique adjacent ; et la troisième portée à gauche répondra, dans l'autre partie de l'hyperboloïde, à un segment égal au second segment sphérique adjacent ; de sorte que ces deux segmens de l'hyperboloïde seront aussi entre eux comme  $\Pi$  et  $\Sigma$ , et que leur somme sera aussi égale à la sphère proposée.

Telle est l'analyse de ce problème dont les divers exemples peuvent vérifier ce qu'on vient

de dire. Qu'on suppose, par exemple,  $\Pi = \Sigma$ , auquel cas on veut partager la sphère en deux parties égales. On aura,

$$\text{cord. } \phi = 2r \left( \frac{\Pi - \Sigma}{\Pi + \Sigma} \right) = 0;$$

par conséquent,

$$x = \text{cord. } \frac{\phi}{3} = 0.$$

Ce qui indique d'abord la section à faire par le centre, comme cela doit être. Ensuite on aura:

$$x' = \text{cord. } \frac{u}{3} = -r\sqrt{3}, \text{ et } x'' = \text{cord. } \frac{2u}{3} = r\sqrt{3};$$

ce qui répond à deux segmens hyperboliques égaux entre eux et à la demi-sphère, comme on peut s'en assurer.

Si l'on suppose  $\Sigma = 0$ , on a  $\text{cord. } \phi = 2r$ , et par conséquent  $\phi = \frac{u}{2}$ . On a donc  $x = \text{cord.}$

$\frac{u}{6} = r$ ; ce qui indique un segment nul et un autre égal à la sphère. Ensuite  $x'' = \text{cord. } \frac{1}{6} u = r$ , et  $x' = \text{cord. } \frac{u}{2} = 2r$ , ou plutôt  $-2r$ ;

ce qui indique deux segmens dans l'hyperboloïde, l'un nul et l'autre égal à la sphère. Au reste, dans ces deux cas, l'équation offre d'elle-même ses racines; car dans le premier elle de-

vient,  $x^3 - 3r^2x = 0$ , qui donne sur-le-champ  $x = 0$ , et  $x = \pm \sqrt{3}r = \pm r\sqrt{3}$ ; ce qui est le côté du triangle équilatéral inscrit.

Dans le second cas, elle devient  $x^3 - 3r^2x + 2r^3 = 0$ , et se décompose en ces trois facteurs,  $(x - r)$ ,  $(x - r)$ ,  $(x - 2r)$ .

Si l'on vouloit construire l'équation par le moyen du cercle et de la parabole, on pourroit employer le cercle dont l'équation est :

$$y^2 + x^2 - 4ry + 2r\left(\frac{\Pi - \Sigma}{\Pi + \Sigma}\right)x = 0,$$

et la parabole dont l'équation est,  $x^2 - ry = 0$ ; car en éliminant  $y$  entre ces équations, afin d'avoir les abscisses  $x$  qui répondent aux points d'intersection des deux courbes, on trouve :

$$x^4 - 3r^2x^2 + r^2 \cdot 2r\left(\frac{\Pi - \Sigma}{\Pi + \Sigma}\right)x = 0,$$

et divisant par  $x$ ,

$$x^3 - 3r^2x + r^2 \cdot 2r\left(\frac{\Pi - \Sigma}{\Pi + \Sigma}\right) = 0;$$

ce qui est l'équation proposée.

Enfin, nous observerons que le problème dont il s'agit étant proposé pour l'ellipsoïde de révolution, conduit absolument à la même équation. Ainsi, en nommant  $a$  le demi-grand axe de l'ellipse, on a, pour déterminer l'apo-

thème  $x$  de deux segmens qui sont entre eux comme  $\Pi$  et  $\Sigma$ , l'équation

$$x^3 - 3a^2x + a^3.2a\left(\frac{\Pi - \Sigma}{\Pi + \Sigma}\right) = 0,$$

et comme le second axe  $b$  n'entre pas dans cette équation, on peut conclure qu'on aura toujours les mêmes solutions pour tous les ellipsoïdes de révolution de même axe  $a$ ; et pour tous les hyperboloïdes conjugués, puisque l'équation de l'ellipse ne diffère de celle de l'hyperbole que par le signe du carré de ce second axe: et c'est ce qui confirme encore ce que nous avons déjà dit, que la question ne peut être proposée pour l'ellipsoïde, sans l'être en même temps pour l'hyperboloïde conjugué.

## PROPOSITION VI.

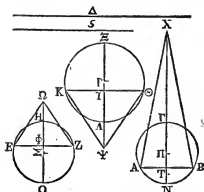
(a) Puisque les segmens  $EZH$ ,  $\Theta\kappa\Lambda$  sont semblables, on aura  $\Sigma O : \Phi O :: PZ : T\Xi$ , et par addition,  $\Sigma O + \Phi O : \Phi O :: PZ + T\Xi : T\Xi$ . Mais on a d'ailleurs,

$$\Sigma O + \Phi O : \Phi O :: \Omega\Phi : H\Phi,$$

$$PZ + T\Xi : T\Xi :: \Psi T : \Lambda T;$$

donc  $\Omega\Phi : H\Phi :: \Psi T : \Lambda T$ . Donc par permutation  $\Omega\Phi : \Psi T :: H\Phi : \Lambda T$ . Mais  $H\Phi : \Lambda T :: EZ : K\Theta$ , à cause que les segmens sont semblables; donc

$\Omega\Theta : \Psi\Upsilon :: EZ : K\Theta$ . Donc les cônes  $EZ\Omega$ ,  $\Psi\Theta K$



sont semblables, puisque leurs hauteurs sont proportionnelles aux diamètres de leurs bases.

(c) C'est-à-dire, qu'elles forment une progression géométrique.

### PROPOSITION IX.

(a) Une raison doublée d'une autre raison est cette seconde raison multipliée par elle-même, et une raison sesquialtère d'une autre raison est cette seconde raison multipliée par sa racine quarrée.

(c) Car la proportion  $E\Delta + \Delta Z : \Delta Z :: \Theta Z : ZB$  donne par soustraction la proportion suivante,  $E\Delta : \Delta Z :: B\Theta : ZB$ , qui devient, en échangeant les extrêmes,  $BZ : Z\Delta :: B\Theta : E\Delta = BE$ .

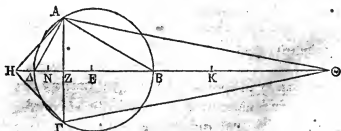
(2) En effet, dans la proportion  $BZ : Z\Delta :: \Theta B : BE$ , la droite  $BZ$  étant plus grande que la droite  $Z\Delta$ , il est évident que  $\Theta B$  sera plus grand que  $BE$ .

( $\delta$ ) Et par permutation,  $KZ : HZ :: ZB : Z\Delta$ .

(ε) Car puisque  $B\Theta > BK$ , il est évident que  $\Theta B : BZ > BK : BZ$ . Donc, par addition,  $\Theta Z : BZ > KZ : BZ$ , et par conversion,  $\Theta Z : \Theta B < KZ : BK$ . Donc, par permutation,  $\Theta Z : KZ < \Theta B : BK$ .

(5) La première surface étant égale au carré de l'ordonnée AZ, et la seconde étant égale au carré du rayon, la première surface est plus petite que la seconde, parce que toute ordonnée qui ne passe pas par le centre est plus petite que le rayon.

(θ) Puisque  $\overline{BN}^2 = \Theta B \times BK$ , on aura,  $\Theta B : BN :: BN : BK$ . Donc  $\Theta B : BK :: \overline{BN}^2 : \overline{BK}^2$ . Mais  $\Theta B$



: BN :: BN : BK; donc, par addition,  $\Theta N : BN$



:: KN : BK. Donc  $\overline{\Theta N}^2 : \overline{BN}^2 :: \overline{KN}^2 : \overline{BK}^2$ ; et par permutation,  $\overline{\Theta N}^2 : \overline{KN}^2 :: \overline{BN}^2 : \overline{BK}^2$ . Mais  $\Theta B : BK :: \overline{BN}^2 : \overline{BK}^2$ ; donc  $\Theta B : BK :: \overline{\Theta N}^2 : \overline{KN}^2$ .

(1) Que les trois quantités  $a, b, c$  soient telles que  $a^3 : b^3 > b : c$ ; je dis que  $a : c > b^{\frac{1}{3}} : c^{\frac{1}{3}}$ .  
 Prenons une moyenne proportionnelle  $d$  entre  $b$  et  $c$ , de manière qu'on ait  $b : d :: d : c$ ; puisque  $a^3 : b^3 > b : c$ , et que  $b : c :: b^3 : d^3$ , nous aurons  $a^3 : b^3 > b^3 : d^3$ ; ou bien  $a : b > b : d$ . Faisons en sorte que  $c : d :: b : e$ . Puisque ces quatre quantités forment une progression géométrique, on aura  $e : c :: b^3 : d^3$ . Mais  $b : d :: b^{\frac{1}{3}} : c^{\frac{1}{3}}$ , parce que  $b : c :: b^3 : d^3$ ; donc  $b^3 : d^3 :: b^{\frac{3}{3}} : c^{\frac{3}{3}}$ . Donc  $e : c :: b^{\frac{1}{3}} : c^{\frac{1}{3}}$ . Mais  $a > e$ ; car si  $a$  étoit égal à  $e$ , on auroit  $a : b :: b : d :: c$ , et par conséquent  $a^3 : b^3 :: b : c$ , et si  $a$  étoit plus petit que  $e$ , on auroit  $a^3 : b^3 < b : c$ . Mais  $a^3 : b^3 > b : c$ ; donc  $a > e$ . Donc  $a : c > b^{\frac{1}{3}} : c^{\frac{1}{3}}$ . Or, Archimède a démontré que  $\overline{\Theta Z}^2 : \overline{ZK}^2 > ZK : ZH$ ; donc  $\Theta Z : ZH > \overline{ZK}^{\frac{1}{2}} : \overline{ZH}^{\frac{1}{2}}$ .

(A) En effet, puisque le segment  $B\Delta\Delta$  : cône  $B\Delta\Delta :: H\Theta : \Theta\Gamma$  (2, 3); que le cône  $B\Delta\Delta$  : cône  $B\Gamma\Delta :: A\Theta : \Theta\Gamma$ , ces deux cônes ayant la même base, et que le cône  $B\Gamma\Delta$  : segment  $B\Gamma\Delta :: A\Theta$



(v) Cette proposition peut se démontrer algébriquement avec la plus grande facilité.

Appelons  $r$  le rayon de la sphère, et  $x$  la droite EZ. La droite  $\Delta Z$  sera égale à  $r - x$ ; et le plus grand segment de la sphère, qui est

AB $\Gamma$ , sera égal à  $\frac{\pi \times \overline{AZ}^2}{3} \times \Theta Z$ , c'est-à-dire à

$$\frac{\pi \times AZ}{3} \frac{(2r - x)(r + x)}{r - x},$$

et le plus petit segment, qui est A $\Delta\Gamma$ , sera égal à

$\frac{\pi \times \overline{AZ}^2}{3} \times HZ$ , c'est-à-dire à

$$\frac{\pi \times \overline{AZ}^2}{3} \frac{(2r + x)(r - x)}{x}.$$

Il faut démontrer d'abord que la raison de

$$\frac{\pi \times AZ}{3} \frac{(2r - x)(r + x)}{r - x}$$

à

$$\frac{\pi \times AZ}{3} \frac{(2r + x)(r - x)}{x}$$

est moindre que la raison doublée de la surface du plus grand segment à la surface du plus petit; c'est-à-dire que

$$\frac{(2r - x)(r + x)}{r - x} : \frac{(2r + x)(r - x)}{x} < (r + x)^2 : (r - x)^2.$$

Il faut démontrer ensuite que

$$\frac{(2r-x)(r+x)}{r-x} : \frac{(2r+x)(r-x)}{x} \\ > (r+x)^{\frac{3}{2}} : (r-x)^{\frac{3}{2}}.$$

Ou ce qui est la même chose, il faut démontrer d'abord que

$$\frac{\frac{(2r-x)(r+x)}{r-x}}{\frac{(2r+x)(r-x)}{x}} < \frac{(r+x)^{\frac{3}{2}}}{(r-x)^{\frac{3}{2}}};$$

et il faut démontrer ensuite que

$$\frac{\frac{(2r-x)(r+x)}{r-x}}{\frac{(2r+x)(r-x)}{x}} > \frac{(r+x)^{\frac{3}{2}}}{(r-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ce qui sera évident, quand on aura fait les opérations convenables.

## PROPOSITION X.

(a) Si une droite est coupée en deux parties inégales en un point et encore en deux autres parties inégales dans un autre point, le rectangle compris sous les deux segmens qui s'éloignent moins du milieu de cette droite, est plus grand que le rectangle compris sous les deux

segmens qui s'en éloignent davantage ; d'où il suit que si le plus petit côté de l'un de ces rectangles est plus grand que le plus petit de l'autre rectangle , le premier rectangle est plus grand que le second.

Cette proposition est démontrée généralement dans Euclide., mais ici c'est un cas particulier facile à démontrer.

En effet , le rectangle  $AP \times PT$  est égal au carré de l'ordonnée qui passe par le point P , et le rectangle  $AK \times KT$  est égal au carré de l'ordonnée KB. Mais l'ordonnée qui passe par le point P est plus grande que l'ordonnée KB ; donc le rectangle  $AP \times PT$  est plus grand que le rectangle  $AK \times KT$ .

(6) Le carré de AP est égal à  $AK \times \Gamma Z$  ; car puisque  $AP = EA$  , et que  $\overline{EA}^2 = \frac{\overline{EZ}^2}{2}$  , il est évident que  $\overline{AP}^2 = \frac{\overline{AB}^2}{2}$  , puisque  $AB = EZ$ .

(7) En effet , puisque  $AP \times PT + \overline{AP}^2 > AK \times KT + AK \times \Gamma Z$  , on aura  $(PT + AP) AP < (KT + \Gamma Z) AK$  , ou bien  $\Gamma A \times AP > ZK \times KA$ .

FIN DU COMM. SUR LA SPHERE ET LE CYLINDRE.

---

# COMMENTAIRE

SUR

## LA MESURE DU CERCLE.

---

### PROPOSITION I.

(α) EN effet, puisque la somme des segmens restans est égale au cercle moins la figure rectiligne inscrite, le cercle moins cette figure rectiligne sera plus petit que le cercle moins le triangle. Donc la figure rectiligne est plus grande que le triangle.

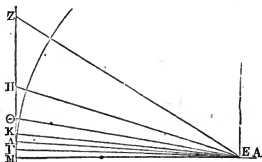
(ε) Car nous venons de démontrer que la figure rectiligne est plus grande que ce triangle.

(γ) En effet, puisque  $OP > PM$ , le triangle OAP est plus grand que le triangle PAM; par la même raison le triangle OAP est plus grand que le triangle PAZ.

## PROPOSITION III.

(a) Car le sinus du tiers d'un angle droit étant égal à la moitié du rayon, et le rayon étant au sinus comme la sécante est à la tangente, il est évident que EZ sera double de ZR, c'est-à-dire que  $EZ : ZR :: 306 : 153$ . Mais  $ZE = 306$ , et  $ZR = 153$ ; donc la droite RE égalera  $\sqrt{306^2 - 153^2}$ ; c'est-à-dire 265 et une fraction. Donc  $RE : ZR > 265 : 153$ .

(c) Puisque la raison de  $RE : RH > 571 : 153$ , il est évident que si RH vaut 153, la droite RE



surpassera 571. Donc  $\overline{RE}^2 + \overline{RH}^2 : \overline{RH}^2 > \overline{571}^2 + \overline{153}^2 : \overline{153}^2$ . Mais  $\overline{RE}^2 + \overline{RH}^2 = \overline{EH}^2$ ; donc  $\overline{EH}^2 : \overline{RH}^2$

$> \overline{571} + \overline{153} : \overline{153}$ ; c'est-à-dire,  $\overline{EH} : \overline{rH} > 349450 : 23409$ ; et si l'on extrait les racines quarrées, on aura  $\overline{EH} : \overline{rH} > 591\frac{1}{8} : 153$ .

FIN DU COMMENT. SUR LA MESURE DU CERCLE.



---

# COMMENTAIRE

SUR

LES CONOÏDES ET LES SPHÉROÏDES.

---

ARCHIMÈDE A DOSITHÉE.

(*α*) DANS Archimède l'ellipse, la parabole et l'hyperbole sont toujours nommées section du cône acutangle, section du cône rectangle et section du cône obtusangle.

Par cône acutangle, il entend un cône droit dont les côtés qui sont les intersections de sa surface et du plan conduit par l'axe, forment un angle aigu. Si ces intersections forment un angle droit, le cône s'appelle rectangle, et si elles forment un angle obtus, le cône s'appelle obtusangle.

En effet, que chacun de ces cônes soit coupé par un plan perpendiculaire sur un des côtés de l'angle formé par le plan qui passe par l'axe, il est évident que la section du cône acutangle sera une ellipse, puisque le plan coupant rencontrera l'autre côté du cône ; que la section

du cône rectangle sera une parabole, puisque le plan coupant sera parallèle à l'autre côté, et que la section du cône obtusangle sera une hyperbole, puisque le plan coupant rencontrera le prolongement de l'autre côté.

Archimède ayant nommé section du cône rectangle, ce que nous appelons parabole, et section du cône obtusangle, ce que nous appelons hyperbole, il nomme conoïde rectangle, le solide de révolution engendré par une parabole, et conoïde obtusangle, le solide de révolution engendré par une hyperbole. Pour éviter les circonlocutions, et à l'exemple d'Apollonius, j'emploierai les mots *ellipse*, *parabole* et *hyperbole*, et par conséquent les mots *conoïde parabolique* et *conoïde hyperbolique*,

(c) Toutes les paraboles sont semblables; donc tous les conoïdes paraboliques sont encore semblables. Les hyperboles semblables sont celles dont les axes sont proportionnels. Donc les conoïdes hyperboliques semblables sont ceux qui sont engendrés par des hyperboles semblables.

### PROPOSITION I.

(a) Soit  $a$  la plus petite des quantités inégales, et  $n$  le nombre de ces quantités; la plus grande égalera  $an$ ; leur somme égalera

$\left(\frac{an + a}{2}\right)n$ , et le double de leur somme égalerait  $(an + a)n$ , c'est-à-dire  $an^2 + an$ ; mais la somme des quantités égales est égale à  $an^2$ ; donc la somme des quantités égales est plus petite que le double de la somme de celles qui se surpassent également de la quantité  $an$ , c'est-à-dire de la plus grande des quantités inégales. Mais la somme des quantités inégales, la plus grande étant exceptée, est égale à  $a$

$$\frac{(n-1)(n-1)}{2};$$

et le double de cette somme est égale à  $a(n-1)(n-1)$ , c'est-à-dire à  $an^2 - 2an + a$ ; donc la somme des quantités égales surpasse le double de la somme des quantités inégales, la plus grande étant exceptée, de  $2an - a$ ; c'est-à-dire du double de la plus grande des quantités inégales, moins la plus petite de ces quantités. Donc la somme des quantités égales est plus grande que la somme des quantités inégales, la plus grande étant exceptée.

## PROPOSITION II.

(a) Soient les quantités

$a, ab, abc, \text{etc.}$	$d, db, dbc, \text{etc.}$
$ae, abf, abcg, \text{etc.}$	$de, dbf, dbcg, \text{etc.}$

l'on aura  $a : ab :: d : db$ ;  $ab : abc :: db : dbc$ ;  
 $a : ae :: d : de$ ;  $ab : abf :: db : dbf$ ;  $abc : abcg$   
 $:: dbc : dbcg$ , etc. Je dis que  $a + ab + abc$   
 $: ae + abf + abcg :: d + db + dbc : de + dbf$   
 $+ dbcg$ . Ce qui est évident; car en échangeant  
 les moyens et en décomposant, on a  $a(1 + b$   
 $+ bc) : d(1 + b + bc) :: a(e + bf + bcg) : d(e$   
 $+ bf + bcg)$ , c'est-à-dire  $a : d :: a : d$ .

(c) Cela est évident, car dans ce cas au lieu  
 de la proportion  $a(1 + b + bc) : d(1 + b + bc)$   
 $:: a(e + bf + bcg) : d(e + bf + bcg)$ , on auroit  
 $a(1 + b) : d(1 + b) :: a(e + bf) : d(e + bf)$ .

### PROPOSITION III.

(a) Appliquer à une ligne une surface dont  
 la partie excédante soit un quarré, c'est appli-  
 quer à cette ligne un rectangle tel que l'excès  
 de sa hauteur sur cette même ligne soit égal  
 à sa base.

(c) Voyez cette proposition et la note (a) qui  
 l'accompagne.

(γ) Cette proposition d'Archimède pourroit  
 se démontrer algébriquement de la manière  
 suivante.

Que le côté du plus petit quarré soit 1, et le  
 nombre des quarrés  $n$ . Que  $a$  soit une des lignes

qu'Archimède appelle A. La somme des quarrés sera égale à  $\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$ , et la somme des rectangles où est la lettre A sera égale à  $\left(\frac{a + an}{2}\right)n$ , c'est-à-dire  $\frac{an + an^2}{2}$ . Donc la somme des quarrés, conjointement avec la somme des rectangles, sera égale à

$$\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) + \frac{1}{2}(an + an^2).$$

La somme de tous les rectangles où sont les lettres  $\Theta$ , I, K, A est égale à  $(a + n)n^2$ .

Il faut démontrer que la raison de  $(a + n)n^2$  à

$$\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) + \frac{1}{2}(an + an^2)$$

est moindre que la raison de  $n + a$  à  $\frac{1}{3}n + \frac{1}{2}a$ , et que la raison de  $(n + a)n^2$  à

$$\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) + \frac{1}{2}(an + an^2) - (a + n)n,$$

est plus grande que la raison de  $n + a$  à  $\frac{1}{3}n + \frac{1}{2}a$ , c'est-à-dire qu'il faut démontrer que

$$\frac{(n + a)n^2}{\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) + \frac{1}{2}(an + an^2)}$$

est plus petit que  $\frac{n + a}{\frac{1}{3}n + \frac{1}{2}a}$ , et que

$$\frac{(a + n)n^2}{\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) + \frac{1}{2}(an + an^2) - (n + a)n}$$

est plus grand que  $\frac{n+a}{\frac{1}{3}n + \frac{1}{3}a}$ . Dans le premier cas, je fais disparaître les dénominateurs, je supprime les facteurs communs, et la première quantité devient  $2n^2 + 3an$ , et la seconde devient  $2n^2 + 3an + 3a + 3n + 1$ . Or, la première quantité est plus petite que la seconde; donc le premier cas est démontré. Pour le second cas, je me conduis d'une manière semblable. La première quantité devient  $2n^2 + 3an + 3a + 6n$ , et la seconde devient  $2n^2 + 3an + 1$ . Or, la première quantité est plus grande que la seconde; donc le second cas est aussi démontré.

(d) Apollonius, liv. III, prop. 17 et 18.

#### PROPOSITION IV.

(c) Apollonius, liv. I, prop. 46.

(γ) Conduisons la droite  $\Delta N$  tangente à la parabole au point  $\Delta$ ; prolongeons  $HB$ , et du point  $\Delta$  menons la perpendiculaire  $\Delta M$  sur  $BH$ . Nommons  $\Delta M$ ,  $y$ , et  $BM$ ,  $x$ ; que  $\Lambda$  soit le paramètre. On aura  $\Delta M = \sqrt{\Lambda x}$ ,  $MN = 2x$ ,  $\Delta N = \sqrt{4x^2 + \Lambda x}$ ,  $AZ = \sqrt{(4x + \Lambda)\Delta Z}$ .

Les deux triangles  $AKZ$ ,  $\Delta MN$  étant sembla-



compris entre les ordonnées du cercle, et le second produit est égal au trapèze compris entre les ordonnées de l'ellipse; donc trapèze EA : trapèze OM :: OE : BO.

(c) Euclide, liv. XII, prop. 2, démontre qu'on peut inscrire dans un cercle un polygone de manière que la somme des segmens placés entre la circonférence et les côtés du polygone soit plus petite qu'une surface donnée. On démontreroit absolument de la même manière qu'on peut inscrire dans une ellipse un polygone dont la somme des segmens compris entre l'ellipse et les côtés du polygone inscrit seroit plus petite qu'une surface donnée. Cela posé, si l'on inscrit dans l'ellipse un polygone dont la somme des segmens soit plus petite que l'excès de la surface comprise dans l'ellipse sur le cercle  $\Psi$ , il est évident que le polygone inscrit sera plus grand que le cercle  $\Psi$ .

## PROPOSITION VI.

(a) Donc si l'on multiplie ces deux proportions termes par termes, et si l'on supprime les facteurs communs des deux termes de chaque raison, la surface X sera au cercle  $\Psi$  comme la surface comprise sous AF, BA est au carré de EZ.

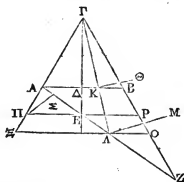


## PROPOSITION VII.

(α) Donc par raison d'égalité, la surface A sera à la surface B comme ΓΔ est à EZ.

## PROPOSITION VIII.

(α) Par le point E menons la droite ΠΕ parallèle à AB, on aura les deux proportions suivantes,  $\Delta\Gamma : \Pi E :: \Delta\Gamma : \Gamma E$ ;  $\Delta B : EP :: \Delta\Gamma : \Gamma E$ . Ces deux proportions donnent  $\Delta\Delta \times \Delta B : \Pi E$



$\times EP :: \overline{\Delta\Gamma} : \overline{\Gamma E}$ ; ou bien  $\Delta\Delta \times \Delta B : \overline{\Delta\Gamma} :: \Pi E \times EP : \overline{\Gamma E}$ . Mais l'angle Z est plus petit que l'angle  $\Pi\Gamma\Gamma$ , qui est égal à l'angle  $\Pi\Gamma\Gamma$ . Donc l'angle Z est plus petit, que l'angle  $\Pi\Gamma\Gamma$ . Faisons l'angle  $\Pi\Gamma\Sigma$  égal à l'angle Z. Les deux triangles ZEP,  $\Pi\Gamma\Sigma$  seront semblables. Donc  $\Pi E : EZ :: \Sigma E : EP$ ;

donc  $\Pi E \times EP = \Sigma E \times EZ$ . Mais  $\Pi E \times EP : \overline{E\Gamma}^2$   
 $:: A\Delta \times \Delta B : \overline{\Delta\Gamma}^2$ ; donc  $\Sigma E \times EZ : \overline{E\Gamma}^2 :: A\Delta \times \Delta B$   
 $: \overline{\Delta\Gamma}^2$ . Donc la raison de  $\Sigma E \times EZ$  à  $\overline{E\Gamma}^2$  est plus  
 grande que la raison de  $A\Delta \times \Delta B$  à  $\overline{\Delta\Gamma}^2$ .

(c) Par raison d'égalité.

(γ) En effet,  $AE : E\Pi :: A\Lambda : \Lambda Z$ , et  $EZ : EP ::$   
 $\Lambda Z : \Lambda O$ . Donc  $AE \times EZ : E\Pi \times EP :: A\Lambda \times \Lambda Z$   
 $: \Lambda Z \times \Lambda O$ .

(δ) Parce que dans l'ellipse le quarré de la  
 moitié du grand diamètre est au quarré de la  
 moitié du petit diamètre comme le quarré d'une  
 ordonnée est au produit des abscisses corres-  
 pondantes.

(ε) Par raison d'égalité.

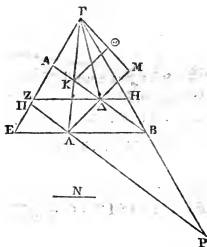
## PROPOSITION IX.

(α) Dans cet endroit, Archimède se sert pour  
 la première fois du mot *ελλειψις*, *ellipsis*.

(c) Dans ce cas, le problème seroit résolu.

(γ) Dans l'ellipse le quarré d'une ordonnée  
 est au produit des abscisses correspondantes

comme le quarré du diamètre conjugué est au quarré du diamètre. Donc  $N^2$  est à  $Z\Delta \times \Delta H$  comme le quarré du diamètre conjugué de l'ellipse décrite autour du diamètre  $ZH$  est au quarré de  $ZH$ . Mais le quarré du diamètre conjugué de l'ellipse décrite autour du diamè-



tre  $E$  est au quarré de  $EB$  comme  $N^2$  est à  $Z\Delta \times \Delta O$ . Donc le quarré du diamètre conjugué de l'ellipse décrite autour du diamètre  $EB$  est au quarré de son autre diamètre  $EB$  comme le quarré du diamètre conjugué de l'ellipse décrite autour de  $ZH$  est au quarré de son autre diamètre  $ZH$ . Donc ces ellipses sont semblables.

( $\Delta$ ) En effet, on a supposé que le quarré de  $N$  est à  $Z\Delta \times \Delta H$  comme le quarré du diamètre

conjugué de l'ellipse décrite autour de EB est au quarré du diamètre EB, c'est-à-dire comme le quarré du demi-diamètre conjugué est au quarré de la moitié de EB. Mais le quarré du demi-diamètre conjugué est au quarré du demi-diamètre EB, comme le quarré de l'ordonnée AM est à  $EA \times AB$  (Apoll. liv. 1, prop. 21). Donc le quarré de N est à  $Z\Delta \times \Delta H$  comme  $\overline{AM}^2$  est à  $EA \times AB$ .

(e) Car les triangles semblables  $Z\Delta A$ ,  $E\Delta \Pi$ , et les triangles semblables  $\Delta BH$ ,  $\Delta PB$  donnent  $Z\Delta : \Delta A :: EA : \Pi A$ ;  $\Delta H : \Delta B :: AB : \Delta P$ . D'où l'on déduit  $Z\Delta \times \Delta H : \Delta A \times \Delta B :: EA \times AB$  ou  $\overline{AM}^2 : \Pi A \times \Delta P$ .

## PROPOSITION X.

(a) C'est-à-dire que la raison du quarré de l'ordonnée  $\Theta K$  au produit des abscisses correspondantes  $AK$ ,  $K\Lambda$ , est la même que la raison du quarré du demi-diamètre  $Z\Gamma$  au quarré du demi-diamètre  $A\Delta$  (Apoll. liv. 1, prop. 21).

(c) Car les droites  $Z\Lambda$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $HB$  étant parallèles, on aura  $Z\Lambda : AK :: Z\Gamma : A\Delta$ ;  $\Delta H : KB :: Z\Gamma : A\Delta$ ; ce qui donne  $Z\Lambda \times \Delta H : AK \times KB :: \overline{Z\Gamma}^2 : \overline{A\Delta}^2$ .

(d) En effet, puisque  $\overline{r\bar{z}} = \overline{z\bar{r}} - \overline{n\bar{z}}$ , nous aurons  $\overline{z\bar{r}} = \overline{r\bar{z}} + \overline{n\bar{z}}$ . Mais  $\overline{r\bar{n}} = \overline{r\bar{z}} + \overline{n\bar{z}}$ ; donc  $\overline{r\bar{n}} = \overline{z\bar{r}}$ .

(e) A cause que les deux triangles  $\Delta MO$ ,  $\Gamma N\bar{z}$  sont semblables.

(f) Car lorsque l'on a deux proportions, et que ces deux proportions ne diffèrent que par les deux premiers termes, les deux premiers termes sont égaux entre eux.

## PROPOSITION XI.

(a) Ces propositions se démontrent comme Euclide a démontré celles qui leur sont analogues.

## PROPOSITION XII.

(a) Ces propositions sont démontrées par Fr. Commandin et par Torelli.

## PROPOSITION XIII.

(a) Entre  $E\Theta$ ,  $\Theta Z$ .

(c) Apollonius, liv. III, prop. 17.



$\frac{ax + xx}{x + \frac{1}{2}a}$ , et MB égalera  $\frac{\frac{1}{2}ax}{x + \frac{1}{2}a}$ . Or,  $\frac{\frac{1}{2}ax}{x + \frac{1}{2}a}$  est plus petit que  $\frac{\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}x}{x + \frac{1}{2}a}$ ; donc MB est plus petit que  $\frac{1}{2}$  MP. Donc MB est plus petit que BP.

(2) Archimède ne démontre point que AF est le grand diamètre de l'ellipse, et que AA en est le petit, parce que cela peut se démontrer, à peu de chose près, de la même manière que dans la proposition précédente. Si l'on vouloit compléter la démonstration précédente, après ces mots *il est donc évident que cette section est une ellipse*, il faudroit ajouter ce qui suit: Joignons les points B, N par la droite BN; menons la droite TA parallèle à NB, et la droite AA perpendiculaire sur BA. Les deux triangles BTN, AAT seront semblables. Donc BT : TN :: AA : AT; ou bien  $\overline{BT}^2 : \overline{TN}^2 :: \overline{AA}^2 : \overline{AT}^2$ . Mais  $\overline{K\Theta}^2 : \overline{A\Theta}^2 \times \overline{\Theta T}^2 :: \overline{BT}^2 : \overline{TN}^2$ ; donc  $\overline{K\Theta}^2 : \overline{A\Theta}^2 \times \overline{\Theta T}^2 :: \overline{AA}^2 : \overline{AT}^2$ . Il est donc encore évident que le grand diamètre est la droite AF, et que le petit diamètre est la droite AA.

La dernière phrase de cette démonstration est tout-à-fait altérée dans le texte grec. Dans les manuscrits et dans toutes les éditions, les lignes AF, AA, BN manquent dans la figure. Voici le texte grec de cette dernière phrase :

Δῆλον ὅτι ἡ τομά ἐστιν ὀξυγωνία κώνη τομά· καὶ διάμετρος αὐτᾶς ἡ μείζων ΑΓ. Ὁμοίως καθιετὴ ἔσῃ τᾶς ΝΡ ἐν τῇ τῷ ἀμβλογωνίᾳ κώνῃ τομά, διάμετρος ταύτας μείζων ἐστὶν ἡ ΓΛ. Ce qui étant traduit mot à mot veut dire : « Il est donc encore certain que c'est » une section du triangle acutangle, et que » son grand diamètre est la droite ΑΓ. La droite » ΝΡ étant semblablement perpendiculaire dans » la section du cône obtusangle, son grand diamètre est la droite ΓΛ ».

Ce qui ne présente aucun sens. En effet, si le grand diamètre de l'ellipse est la droite ΑΓ, ce même diamètre ne pourroit pas être une droite différente désignée par ΓΛ qui n'existe pas dans la figure. Heureusement la proposition précédente nous offre le moyen de rétablir la figure, ainsi que le texte grec dans toute son intégrité. J'ai rétabli la figure, et voici le texte grec tel qu'il doit être : Δῆλον ὅτι ἡ τομά ἐστιν ὀξυγωνία κώνη τομά· καὶ διάμετρος αὐτᾶς ἡ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ· ἡ δὲ ἐλλάσσων διάμετρος ἴσα ἐντὶ τῇ ΑΛ, τᾶς μὲν ΓΛ παρὰ τὰν ΒΝ ἐσας, τᾶς δὲ ΑΛ καθιετὴ ἐπὶ τὰν ΒΔ.

## PROPOSITION XV.

(a) Apollonius, liv. III, prop. 17.



## PROPOSITION XIX.

(a) Apollonius, liv. II, prop. 6.

(c) D'après la proposition 47, du premier livre d'Apollonius.

## PROPOSITION XXIII.

(a) Car puisque fig. cir. — fig. ins.  $<$  seg. —  $\Psi$ , à plus forte raison seg. — fig. ins.  $<$  seg. —  $\Psi$ . Donc fig. ins.  $>$   $\Psi$ .

(c) Apollonius, liv. I, prop. 20.

(γ) En effet, on a six cylindres égaux et six droites égales, qui sont les rayons de ces cylindres, et ces cylindres sont proportionnels deux à deux à ces droites; de plus cinq de ces cylindres sont comparés aux cylindres inscrits, et les droites égales sont comparées aux droites placées entre les droites  $B\Delta$ ,  $BA$ , sous les mêmes raisons (2).

(δ) C'est-à-dire la somme des rayons des bases des cylindres compris dans le cylindre total.

(e) Parce que le premier cylindre, placé dans

le cylindre total, est égal au premier des cylindres circonscrits.

### PROPOSITION XXIV.

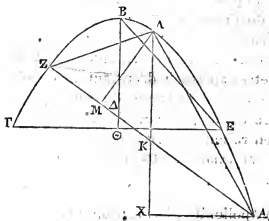
(a) Apollonius, liv. II, prop. 46.

(c) *Idem*, liv. I, prop. 20.

### PROPOSITION XXV.

(2) Pour rendre cette conclusion évidente, je vais faire voir que la raison de  $KA$  à  $EO$  est la même que la raison de la surface comprise sous les diamètres de l'ellipse au carré du diamètre  $EF$ . Pour cela je suppose une parallèle à  $BA$  menée par le point  $A$ , et une parallèle à  $TE$  menée par le point  $Z$ . La parallèle menée par le point  $Z$  et prolongée jusqu'à l'autre parallèle, sera égale au petit diamètre de l'ellipse (13). En effet, la portion de la parallèle à  $TE$  menée par le point  $Z$ , et qui est placée entre le point  $Z$  et la droite  $BA$ , est à la portion de cette même parallèle qui est placée entre la droite  $BA$  et la parallèle à  $BA$  menée par le point  $A$ , comme  $ZK$  est à  $KA$ . Mais  $ZK$  est égal à  $KA$ ; donc la parallèle à  $TE$  placée entre le point  $Z$  et la parallèle à  $BA$  menée par le point  $A$ , est partagée en deux parties égales par la droite  $BA$ . Mais

une des parties de cette parallèle est égale à  $XA$ , et  $XA$  est égal à  $E\Theta$  (4); donc la parallèle à  $TE$ , menée du point  $Z$  et prolongée jusqu'à la parallèle à  $BA$  menée par le point  $A$ , est égale à  $TE$ . Mais cette parallèle est égale au petit diamètre de l'ellipse décrite autour de  $AZ$  comme



diamètre (13); donc la droite RE est aussi égale au petit diamètre de cette ellipse.

Cela posé, il est évident que  $KA : E\Theta :: AZ \times TE : TE \times TE$ ; car supprimant le facteur commun, et divisant la dernière raison par deux, on a  $KA : E\Theta :: KA : E\Theta$ .

(δ) A cause des triangles semblables  $KAM$ ,  
 $KAX$ .

(\*) C'est-à-dire que le segment de cône est

au cône comme la surface comprise sous  $AK$ ,  $AM$  est à la surface comprise sous  $AK$ ,  $KM$ .

### PROPOSITION XXVI.

(a) Car ces deux cônes sont entre eux en raison composée de la raison du cercle décrit autour du diamètre  $AF$ , au cercle décrit autour du diamètre  $EZ$ , et de la raison  $BA$  à  $B\Theta$ . Mais la raison du cercle décrit autour de  $AF$  comme diamètre, au cercle décrit autour du diamètre  $EZ$  est égale à la raison du carré de  $AD$  au carré de  $E\Theta$ . Donc ces deux cônes sont entre eux en raison composée de la raison du carré de  $AD$  au carré de  $E\Theta$ , et de la raison de  $BA$  à  $B\Theta$ .

(c) Apollonius, liv. 1, prop. 21.

### PROPOSITION XXVII.

(a) Voyez la note ( $\gamma$ ) de la proposition 3.

( $\gamma$ ) Apollonius, liv. 1, prop. 21.

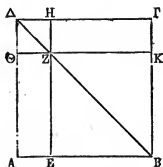
### PROPOSITION XXVIII.

(a) Apollonius, liv. 1, prop. 46.

(c) *Idem*, liv. 1, prop. 21.

## PROPOSITION XXIX.

(c) Dans le quarré  $\Delta\Gamma$ , menons la diagonale  $\Delta B$ ; et par le point  $Z$  de cette diagonale menons les droites  $\Theta K$ ,  $HE$  parallèles aux côtés  $\Delta B$ ,  $\Delta\Gamma$ . La réunion des deux rectangles  $AZ$ ,  $Z\Gamma$  et le quarré  $\Theta H$ , forment le gnomon du quarré  $\Delta\Gamma$ .



La largeur du gnomon étant  $AE$ , qui est égal à  $BI$  dans la figure d'Archimède, et le côté du quarré étant égal au demi-diamètre de l'ellipse, le rectangle  $AH$  sera égal à la surface comprise sous  $\Theta\Delta$ ,  $BI$ , et la droite  $HR$  étant égale à  $BI$ , le rectangle  $Z\Gamma$  sera égal à la surface comprise sous  $\Theta\Delta$ ,  $BI$ . Donc le gnomon sera égal à la surface comprise sous  $BI$ ,  $IA$ .

(γ) Le second quarré est le premier de la

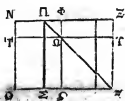
rangée à droite, le premier étant celui qui est seul.

### PROPOSITION XXXI.

(α) Que  $BH \equiv 3 B\Theta$  ; que  $BA \equiv 3 BP$ . Il est évident que  $EH - BA \equiv 3 B\Theta - 3 BP \equiv 3 (B\Theta - BP)$ , c'est-à-dire que  $\Delta H \equiv 3 \Theta P$ .

(c) Puisque  $NZ = Z\Delta$ , que  $OZ = BA$ , il est évident que  $NZ - \Theta Z = Z\Delta - BA$ , c'est-à-dire que  $NO \equiv 2 \Delta \Theta$ .

(γ) C'est-à-dire, retranchons du rectangle  $NZ$  un gnomon dont la largeur  $\Phi Z$ , qui est égale à  $TO$ , soit égale à  $BA$ . Ce gnomon renfermera le rectangle  $NZ$ , moins le rectangle  $N\Omega$ . Or, ce gnomon égale le rectangle  $OT$  + le rectangle  $\Phi T$ , c'est-à-dire  $NZ \times TO + \Phi\Omega \times \Omega T \equiv (NZ + \Phi\Omega) \times \Omega T \equiv BE \times EZ$ .



FIN DU PREMIER VOLUME.

SN 615221

---

---

## TABLE.

<u>ÉPITRE DÉDICATOIRE.....</u>	<u>page v</u>
Avertissement du Libraire.....	vij
Rapport fait à l'Institut national, Classe des Sciences physiques et mathématiques, par MM. Lagrange et Delambre, sur la traduction des ŒUVRES D'ARCHIMÈDE.....	ix
Préface contenant la Vie d'Archimède et l'analyse de ses Ouvrages .....	xvij
<u>Avis au Lecteur.....</u>	<u>lxvij</u>
<hr/>	
<u>De la Sphère et du Cylindre.....</u>	<u>1</u>
<u>De la Mesure du Cercle.....</u>	<u>198</u>
<u>Des Conoïdes et des Sphéroïdes.....</u>	<u>207</u>
Commentaire sur les Œuvres d'Archimède..	365
—— sur les deux livres de la Sphère et du Cy- lindre.....	368
—— <u>sur la Mesure du Cercle.....</u>	<u>410</u>
—— <u>sur les Conoïdes et les Sphéroïdes.</u>	<u>415</u>

---

1. The first part of the paper is devoted to a discussion of the  
 2. various methods which have been proposed for the determination of  
 3. the rate of reaction between a free radical and a molecule of  
 4. a substance. It is shown that the most reliable method is the  
 5. one which involves the measurement of the rate of disappearance of  
 6. the radical itself. This method is based on the fact that the  
 7. rate of disappearance of the radical is proportional to the rate  
 8. of reaction between the radical and the substance. The method  
 9. involves the measurement of the rate of disappearance of the  
 10. radical by means of a spectrophotometer. The rate of  
 11. disappearance of the radical is measured by observing the  
 12. change in the optical density of the solution of the radical  
 13. as a function of time. The rate of reaction between the  
 14. radical and the substance is then determined from the rate  
 15. of disappearance of the radical.

16. The second part of the paper is devoted to a discussion of the  
 17. various factors which influence the rate of reaction between a  
 18. free radical and a molecule of a substance. It is shown that  
 19. the rate of reaction is influenced by the concentration of the  
 20. radical, the concentration of the substance, the temperature,  
 21. the nature of the radical, and the nature of the substance.  
 22. The rate of reaction is also influenced by the presence of  
 23. inhibitors and promoters. The rate of reaction is increased  
 24. by the presence of promoters and decreased by the presence of  
 25. inhibitors. The rate of reaction is also influenced by the  
 26. nature of the solvent. The rate of reaction is generally  
 27. higher in a polar solvent than in a non-polar solvent.



